Invariantes de ciclo: solución

UVa 507 y la demostración de *mejor*

Carlos Andrés Delgado Saavedra

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Contenido

1 Solución del ejercicio
- La traza
- Los invariantes
- Los tres pasos

2 Demostración de mejor

UVa 507: el ciclo

```
0  def mejor_tramo(v):
1      suma = 0
2      mejor = 0
3      k = 0
4      while k < len(v):
5          suma = suma + v[k]
6          if suma > mejor:
7              mejor = suma
8          if suma < 0:
9              suma = 0
10         k = k + 1
11     return mejor
```

Notación

$S(i,j) = \sum_{t=i}^{j-1} v[t]$, con $S(i,i) = 0$. La traza usa $v = [2, -3, 4, -1, 2, -6]$.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0

Nada recorrido: $suma = S(0,0) = 0$ y $mejor = 0$.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2

$0 + 2 = 2$. Ahora *suma* $= S(0, 1)$, y *mejor* sube a 2.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2
2	4	0	2

$2 - 3 = -1 < 0$: la línea 9 deja $suma = 0 = S(2, 2)$, el tramo vacío. *mejor* sigue en 2.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2
2	4	0	2
3	-1	4	4

$0 + 4 = 4$. Ahora *suma* $= S(2, 3)$, y *mejor* sube a 4.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2
2	4	0	2
3	-1	4	4
4	2	3	4

$4 - 1 = 3$. Las dos columnas difieren: $suma = S(2, 4) = 3$, y el 4 de *mejor* es de un tramo que no llega a $k = 4$.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2
2	4	0	2
3	-1	4	4
4	2	3	4
5	-6	5	5

$3 + 2 = 5$. Ahora *suma* $= S(2, 5)$, y *mejor* sube a 5.

UVa 507: la traza

k	$v[k]$	*suma*	*mejor*
0	2	0	0
1	-3	2	2
2	4	0	2
3	-1	4	4
4	2	3	4
5	-6	5	5
6		0	5

$5 - 6 = -1 < 0$: *suma* vuelve a $0 = S(6, 6)$. El ciclo termina y devuelve 5. ¿Qué tramos describe *suma*?

UVa 507: los invariantes

suma describe los tramos que terminan justo antes de k, contando el vacío: es la mayor suma entre ellos. *mejor* es la mayor suma entre todos los tramos de $v[0..k)$.

$$
\begin{aligned}
I_0: \quad & 0 \leq k \leq n \\
I_1: \quad & \exists i\,(0 \leq i \leq k \wedge \mathit{suma} = S(i,k)) \\
& \quad \wedge\ \forall i\,(0 \leq i \leq k \rightarrow S(i,k) \leq \mathit{suma}) \\
I_2: \quad & \exists i\,\exists j\,(0 \leq i \leq j \leq k \wedge \mathit{mejor} = S(i,j)) \\
& \quad \wedge\ \forall i\,\forall j\,(0 \leq i \leq j \leq k \rightarrow S(i,j) \leq \mathit{mejor})
\end{aligned}
$$

UVa 507: los invariantes

Las mismas fórmulas, abreviadas

$$suma = \text{máx}\{\, S(i,k) : 0 \leq i \leq k \,\}$$
$$mejor = \text{máx}\{\, S(i,j) : 0 \leq i \leq j \leq k \,\}$$

El tramo vacío, $i = k$ o $i = j$, suma 0, así que ninguna de las dos baja de 0. Equivalen al máximo entre 0 y las sumas de los tramos no vacíos.

UVa 507: demostración

Teorema y estrategia

Para todo $v[0..n-1]$, I_0, I_1 e I_2 valen en cada chequeo de la línea 4. Se demuestra con los tres pasos.

```
1 suma = 0
2 mejor = 0
3 k = 0
```

Inicialización. Con $k = 0$ el único rango posible es $i = j = 0$, y $S(0,0) = 0$.

- I_0: $0 \leq 0 \leq n$. ✓
- I_1: $i = 0$ es testigo y única cota: $suma = 0 = S(0,0)$. ✓
- I_2: $i = j = 0$ es testigo y única cota: $mejor = 0 = S(0,0)$. ✓

UVa 507: demostración

```
5 suma = suma + v[k]
```

Estabilidad: línea 5

Una vuelta cualquiera, con $0 \leq k < n$ y los tres invariantes en k. Sea $i_0 \leq k$ el testigo de I_1, y $suma'$ el valor tras la línea 5:

$$suma' = S(i_0, k) + v[k] = S(i_0, k+1).$$

Y por la parte $\forall$ de I_1, para todo i con $0 \leq i \leq k$,

$$S(i, k+1) = S(i, k) + v[k] \leq suma + v[k] = suma'. \qquad (*)$$

UVa 507: demostración

```
6 if suma > mejor:
7     mejor = suma
```

Estabilidad de I_2: caso $suma' > mejor$

La línea 7 deja $mejor = suma'$, con testigo $(i_0, k+1)$. Cotas, en $k+1$:

- $j \leq k$: $S(i,j) \leq$ el *mejor* viejo $< suma'$, por I_2 en k. ✓
- $j = k+1$ e $i \leq k$: es $(*)$. ✓
- $i = j = k+1$: $0 = S(0,0) \leq$ el *mejor* viejo $< suma'$. ✓

UVa 507: demostración

```
6 if suma > mejor:
7     mejor = suma
```

Estabilidad de I_2: caso $suma' \leq mejor$

mejor no cambia y su testigo sigue en el rango. Cotas, en $k+1$:

- $j \leq k$: por I_2 en k. ✓
- $j = k+1$ e $i \leq k$: $(*)$ da $S(i, k+1) \leq suma' \leq mejor$. ✓
- $i = j = k+1$: $0 = S(0,0) \leq mejor$, por I_2 en k. ✓

UVa 507: demostración

```
8 if suma < 0:
9     suma = 0
```

Estabilidad de I_1: caso $suma' < 0$

I_1 en $k+1$ tiene un i más en el rango, $i = k+1$, el tramo vacío. La línea 9 deja $suma = 0$.

- Testigo: $i = k+1$, con $S(k+1, k+1) = 0$. ✓
- Cotas: si $i \leq k$, $(*)$ da $S(i, k+1) \leq suma' < 0$; si $i = k+1$, $0 \leq 0$. ✓

UVa 507: demostración

```
8  if suma < 0:
9      suma = 0
10 k = k + 1
```

Estabilidad de I_1: caso $suma' \geq 0$

$suma'$ se queda.

- Testigo: i_0, porque $suma' = S(i_0, k+1)$. ✓
- Cotas: si $i \leq k$, es $(*)$; si $i = k+1$, $0 \leq suma'$. ✓

En los dos casos, la línea 10 lleva k a $k+1$, y de $0 \leq k < n$ sale $0 \leq k+1 \leq n$, que es I_0. ✓

UVa 507: demostración

Terminación

k sube de 1 en 1 e I_0 lo acota por n, así que el ciclo termina. Al salir, $k < n$ es falsa; con I_0 queda $k = n$. Sustituyendo en I_2:

$$\mathit{mejor} = \text{máx}\{\, S(i,j) : 0 \leq i \leq j \leq n \,\},$$

la mayor suma de un tramo de v, que vale 0 si ninguno es positivo. La línea 11 la devuelve. ■

Contenido

1 Solución del ejercicio

2 Demostración de mejor
- UVa 11078

mejor: el ciclo

```
0  def mayor_diferencia(a):
1      mayor = a[0]
2      mejor = a[0] - a[1]
3      j = 1
4      while j < len(a):
5          if mayor - a[j] > mejor:
6              mejor = mayor - a[j]
7          if a[j] > mayor:
8              mayor = a[j]
9          j = j + 1
10     return mejor
```

Especificación

Entrada: $a[0..n-1]$ de enteros, $n \geq 2$.
Salida: $\max\{\, a[s] - a[t] : 0 \leq s < t < n \,\}$.

mejor: los invariantes

Teorema 1, demostrado en las diapositivas de la clase

I_0: $1 \leq j \leq n$, e I_1: $mayor = \text{máx}\, a[0..j)$, valen en cada chequeo de la línea 4. En detalle,

$$I_1 : \quad \exists t\,(0 \leq t < j \wedge a[t] = mayor) \;\wedge\; \forall t\,(0 \leq t < j \rightarrow a[t] \leq mayor)$$

Las parejas que *mejor* ya tuvo en cuenta son
$P_j = \{(0,1)\} \cup \{\,(s,t) : 0 \leq s < t < j\,\}$, y

$$\begin{aligned} I_2 : \quad & \exists (s,t) \in P_j\,(a[s] - a[t] = mejor) \\ & \wedge\; \forall (s,t) \in P_j\,(a[s] - a[t] \leq mejor) \end{aligned}$$

mejor: demostración

Teorema 2 y estrategia

Para todo $a[0..n-1]$ con $n \geq 2$, I_2 vale en cada chequeo de la línea 4 y `mayor_diferencia(a)` devuelve la salida especificada. Se demuestra con los tres pasos, usando el Teorema 1.

Inicialización. Con $j = 1$ el rango no tiene parejas, así que $P_1 = \{(0, 1)\}$. La línea 2 deja $\mathit{mejor} = a[0] - a[1]$: la única pareja es testigo y cota a la vez. ✓

mejor: demostración

Estabilidad. Una vuelta cualquiera, con $1 \leq j < n$. Se asumen l_0, l_1 e l_2 en j. Las parejas nuevas son las que terminan en j:

$$P_{j+1} = P_j \cup \{ (s, j) : 0 \leq s < j \}$$

¿Cuál de las nuevas da la mayor diferencia, y cómo se sabe sin recorrerlas?

mejor: demostración

La mejor pareja nueva sale de I_1

La parte $\exists$ de I_1 da un $t_0 < j$ con $a[t_0] = \mathit{mayor}$. La parte $\forall$ da, para todo $s < j$,

$$a[s] - a[j] \;\leq\; \mathit{mayor} - a[j] \;=\; a[t_0] - a[j]. \qquad (*)$$

La mejor pareja nueva es (t_0, j), con diferencia $\mathit{mayor} - a[j]$. Por eso I_2 necesita a I_1 con sus dos partes.

mejor: demostración

```
5 if mayor - a[j] > mejor:
6     mejor = mayor - a[j]
```

Estabilidad: caso $mayor - a[j] > mejor$

La línea 6 deja $mejor = a[t_0] - a[j]$, con testigo (t_0, j). ✓
Cotas: las parejas de P_j quedan por debajo del *mejor* viejo, que es menor que el nuevo, y las nuevas cumplen $(*)$. ✓

mejor: demostración

```
5 if mayor - a[j] > mejor:
6     mejor = mayor - a[j]
```

Estabilidad: caso $mayor - a[j] \leq mejor$

mejor no cambia y su testigo sigue en P_{j+1}. ✓
Cotas: las de P_j son I_2 en j, y las nuevas cumplen
$a[s] - a[j] \leq mayor - a[j] \leq mejor$, por $(*)$ y por el caso. ✓

mejor: demostración

El orden de los dos `if`

Las líneas 5 y 6 leen *mayor* antes de que la 8 lo cambie: es l_1 en j, el máximo de las posiciones $s < j$. Con los `if` al revés entra la pareja (j, j), de diferencia 0, que no existe en la especificación. Con $[1, 2, 3]$ ese ciclo devuelve 0 y el original -1.

mejor: demostración

Terminación

Por el Teorema 1, el ciclo termina con $j = n$. Como $n \geq 2$, la pareja $(0, 1)$ ya está en el rango, y

$$P_n = \{\, (s, t) : 0 \leq s < t < n \,\}.$$

I_2 en n dice que *mejor* es el máximo de $a[s] - a[t]$ sobre todas las parejas, y la línea 10 lo devuelve. ■