Lógica: proposiciones, cuantificadores y la definición de O

Escribir propiedades como fórmulas

Carlos Andrés Delgado Saavedra

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Objetivos

Al terminar, usted podrá

- Evaluar una fórmula con conectivos usando su tabla de verdad.
- Distinguir una implicación de su recíproca y de su contrarrecíproca, y decir cuáles son equivalentes.
- Escribir una propiedad del mundo real o de un arreglo como fórmula con cuantificador, dominio y rango de índices.
- Negar una fórmula cuantificada sin perder el rango.
- Leer la definición de O y señalar los testigos c y k en un ejemplo.

Cómo va cada tema

Tres partes en el mismo orden

El concepto con su definición, un ejemplo trabajado con su traza y los ejercicios con su solución.

Conocimiento previo

Arreglos indexados desde cero, $A[0..n-1]$, y manejo de desigualdades entre enteros.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Contenido

1 Proposiciones y conectivos
- Concepto
- Ejemplo
- Ejercicio

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Proposición

Definición

Una proposición es un enunciado que es verdadero o falso, y no ambos a la vez. Se nombran con letras p, q, r.

Lo que no es una proposición

Una pregunta o una orden no tiene valor de verdad. Un enunciado con una variable libre, como $x + 1 > 3$, tampoco: se vuelve proposición cuando se fija el valor de la variable.

Conectivos y su tabla de verdad

Los cinco conectivos

$\neg p$ (no p), $p \wedge q$ (p y q), $p \vee q$ (p o q, o ambas), $p \to q$ (si p, entonces q), $p \leftrightarrow q$ (p si y solo si q).

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

$(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$

Conectivos y su tabla de verdad

Dos renglones que se leen mal

- $p \to q$ es falsa en un solo renglón: p verdadera y q falsa. Con p falsa, la implicación es verdadera sin importar q.
- $p \vee q$ es verdadera también cuando ambas lo son.

¿Cuáles tienen un valor de verdad?

Decida si cada enunciado es verdadero o falso

1. 7 es un número primo.
2. ¿Ya entregó la tarea?
3. $x + 1 > 3$.
4. Todo arreglo de un solo elemento está ordenado.
5. $A[0] \leq A[1]$.

¿Cuáles tienen un valor de verdad?

Decida si cada enunciado es verdadero o falso

1. 7 es un número primo. — Verdadero.
2. ¿Ya entregó la tarea? — Es una pregunta: no tiene valor.
3. $x + 1 > 3$. — Depende de x.
4. Todo arreglo de un solo elemento está ordenado. — Verdadero.
5. $A[0] \leq A[1]$. — Depende de A.

Los enunciados 3 y 5 se vuelven proposiciones cuando se fija el valor de x o el contenido de A.

Evaluar una fórmula

Pregunta

Con $p = \mathsf{V}$, $q = \mathsf{F}$ y $r = \mathsf{F}$, ¿qué valor tiene $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$?

Evaluar una fórmula

Pregunta

Con $p = \mathrm{V}$, $q = \mathrm{F}$ y $r = \mathrm{F}$, ¿qué valor tiene $(p \wedge \neg q) \to r$?

Traza: de adentro hacia afuera

Subfórmula	Valor	Por qué
$\neg q$	V	q es falsa
$p \wedge \neg q$	V	las dos partes son verdaderas
$(p \wedge \neg q) \to r$	F	antecedente verdadero, consecuente falso

Ejercicio 1 (base)

Tabla de verdad

Construya la tabla de verdad de $(p \to q) \wedge (q \to p)$ y compárela con la de $p \leftrightarrow q$. ¿Son equivalentes?

Tautologia: Todas son V
Contradiccion: Todas son F
Contingencia: F o V en unas.

Solución del ejercicio 1

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Las dos últimas columnas coinciden en los cuatro renglones: son equivalentes. “Si y solo si” pide las dos implicaciones a la vez.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca
- Concepto
- Ejemplo
- Ejercicio

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Tres implicaciones con las mismas piezas

Definición

Dada la implicación $p \to q$:

- su **recíproca** es $q \to p$;
- su **contrarrecíproca** es $\neg q \to \neg p$;
- su **inversa** es $\neg p \to \neg q$.

Con el césped: $p =$ llueve, $q =$ el césped está mojado

Original	Si llueve, el césped está mojado.
Recíproca	Si el césped está mojado, llovió.
Contrarrecíproca	Si el césped no está mojado, no llovió.
Inversa	Si no llueve, el césped no está mojado.

Cuál equivale a cuál

Equivalencias

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$: una implicación y su contrarrecíproca valen lo mismo.

$q \to p \equiv \neg p \to \neg q$: la recíproca y la inversa también valen lo mismo entre sí.

La recíproca no se hereda

De una implicación verdadera no se sigue que su recíproca lo sea: las dos difieren en dos renglones de la tabla de verdad.

¿Llovió?

Pregunta

Se sabe que: “si llueve, entonces el césped del campus está mojado”.

Usted llega y ve el césped mojado. ¿Llovió?

¿Llovió?

Pregunta

Se sabe que: “si llueve, entonces el césped del campus está mojado”.

Usted llega y ve el césped mojado. ¿Llovió?

Respuesta

No se puede concluir: pudieron regarlo. La regla dice qué pasa cuando llueve, no qué pasa cuando el césped está mojado.

Lo que sí se concluye es otra cosa: si el césped está seco, no llovió.

¿Cuáles son equivalentes?

Primero la original y la recíproca

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Difieren en el segundo y el tercer renglón: la recíproca **no** es equivalente a la original. El tercer renglón es el césped regado sin lluvia.

¿Cuáles son equivalentes?

Ahora con la contrarrecíproca

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Las dos columnas sombreadas coinciden en los cuatro renglones: la original y su contrarrecíproca dicen lo mismo.

Con un arreglo

Pregunta

Sea $A[0..n-1]$ con $n \geq 1$. La implicación

"si A está ordenado ascendentemente, entonces $A[0] \leq A[n-1]$"

es verdadera. Escriba su recíproca y su contrarrecíproca. ¿Cuál de las dos es verdadera para todo arreglo?

Con un arreglo

Pregunta

Sea $A[0..n-1]$ con $n \geq 1$. La implicación "si A está ordenado ascendentemente, entonces $A[0] \leq A[n-1]$" es verdadera. Escriba su recíproca y su contrarrecíproca.

Respuesta

- Contrarrecíproca: si $A[0] > A[n-1]$, entonces A no está ordenado. Es verdadera, porque equivale a la original.
- Recíproca: si $A[0] \leq A[n-1]$, entonces A está ordenado. Es falsa: con $A = [1, 3, 2, 4]$ se tiene $1 \leq 4$ y el arreglo no está ordenado.

Errores comunes con la implicación

Confundir recíproca con contrarrecíproca

Para demostrar $p \to q$ sirve demostrar $\neg q \to \neg p$. Demostrar $q \to p$ no prueba nada sobre la original.

Negar una implicación como si fuera la inversa

La negación de $p \to q$ no es $\neg p \to \neg q$. Por la tabla, $p \to q$ falla solo cuando p es verdadera y q falsa:

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q.$$

Esta equivalencia vuelve a aparecer al negar cuantificadores.

Ejercicio 2 (base)

Recíproca y contrarrecíproca

Para la implicación "si n es múltiplo de 4, entonces n es par", con n entero:

1. Escriba la recíproca y la contrarrecíproca.
2. Diga cuál es verdadera y dé un contraejemplo para la que no lo es.

Solución del ejercicio 2

Recíproca

Si n es par, entonces n es múltiplo de 4. Es falsa: $n = 6$ es par y no es múltiplo de 4.

Contrarrecíproca

Si n es impar, entonces n no es múltiplo de 4. Es verdadera, porque equivale a la original: si $n = 4a$, entonces $n = 2(2a)$ es par.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores
- Concepto
- Ejemplo
- Ejercicio

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Enunciados que dependen de una variable

Predicado y dominio

Un predicado $P(x)$ es un enunciado que se vuelve proposición al darle un valor a x. El **dominio** es el conjunto de valores que puede tomar x.

Ejemplo: $P(x)$ es $x + 1 > 3$, con x entero

$P(5)$ es verdadera, $P(2)$ es falsa.

Cuantificadores

- $\forall x\, P(x)$: $P(x)$ es verdadera para todo x del dominio.
- $\exists x\, P(x)$: $P(x)$ es verdadera para al menos un x del dominio.

Cuantificar sobre las posiciones de un arreglo

En $A[0..n-1]$ las posiciones válidas son los enteros i con $0 \leq i < n$. Ese es el **rango** del índice, y va escrito dentro de la fórmula.

Cómo se escribe el rango

- Para todo: $\forall i\,(0 \leq i < n \to P(i))$.
- Existe: $\exists i\,(0 \leq i < n \wedge P(i))$.

El cuantificador universal lleva el rango con $\to$; el existencial, con $\wedge$.

Ejemplo

"Todos los elementos de A son positivos": $\forall i\,(0 \leq i < n \to A[i] > 0)$.

"Algún elemento de A es cero": $\exists i\,(0 \leq i < n \wedge A[i] = 0)$.

Negar un cuantificador

Leyes de De Morgan para cuantificadores

$$\neg\forall x\, P(x) \;\equiv\; \exists x\, \neg P(x) \qquad\qquad \neg\exists x\, P(x) \;\equiv\; \forall x\, \neg P(x)$$

"No todos cumplen" es "alguno no cumple"; "ninguno cumple" es "todos no cumplen".

Con el rango adentro

Al negar, el universal pasa a existencial y su $\rightarrow$ pasa a $\wedge$; el existencial pasa a universal y su $\wedge$ pasa a $\rightarrow$. El rango no se niega.

El dominio cambia la respuesta

Pregunta

¿Es verdadera $\exists x\,(x + 1 = 0)$?

El dominio cambia la respuesta

Pregunta

¿Es verdadera $\exists x\,(x + 1 = 0)$?

Respuesta

Depende del dominio.

- En los enteros es verdadera: $x = -1$.
- En los naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$ es falsa: $x + 1 \geq 1$.

Una fórmula con cuantificador no tiene valor de verdad mientras no se diga su dominio.

¿Por qué no al revés?

Pregunta

¿Qué dice la fórmula $\exists i\,(0 \leq i < n \to A[i] = 0)$?

¿Por qué no al revés?

Pregunta

¿Qué dice la fórmula $\exists i\,(0 \leq i < n \to A[i] = 0)$?

Respuesta

Nada útil. Con $i = -1$ el antecedente $0 \leq i < n$ es falso y la implicación es verdadera, así que la fórmula vale para cualquier arreglo, tenga ceros o no.

El mismo problema en el otro sentido

$\forall i\,(0 \leq i < n \wedge A[i] > 0)$ exige que *todo* entero i esté entre 0 y $n - 1$. Con $i = -1$ falla, así que es falsa para cualquier arreglo.

Traza: evaluar sobre un arreglo concreto

$\forall i\,(0 \le i < n \to A[i] > 0)$ con $A = [3, 7, 1, 5]$, $n = 4$

i	$A[i]$	$A[i] > 0$
0	3	V
1	7	V
2	1	V
3	5	V

Todas las posiciones del rango cumplen: la fórmula es verdadera.

Traza: el mismo arreglo con un cero

$\forall i\,(0 \le i < n \to A[i] > 0)$ con $A = [3, 7, 0, 5]$, $n = 4$

i	$A[i]$	$A[i] > 0$
0	3	V
1	7	V
2	0	F
3	5	V

Una posición que falla basta: la fórmula es falsa, y $i = 2$ es el contraejemplo.

Arreglo vacío, $n = 0$

Ningún i cumple $0 \le i < 0$. El universal es verdadero, porque no hay quién lo contradiga, y el existencial es falso, porque no hay testigo.

Negar “todos los elementos son positivos”

Paso a paso

$$
\begin{aligned}
& \neg \forall i \, (0 \leq i < n \to A[i] > 0) && \\
\equiv\ & \exists i \, \neg (0 \leq i < n \to A[i] > 0) && \text{negación de } \forall \\
\equiv\ & \exists i \, (0 \leq i < n \wedge \neg (A[i] > 0)) && \neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q \\
\equiv\ & \exists i \, (0 \leq i < n \wedge A[i] \leq 0) &&
\end{aligned}
$$

En palabras: hay una posición válida con un valor que no es positivo. El rango sigue igual.

Negar un existencial

Pregunta

Niegue "x aparece en A": $\exists i\,(0 \leq i < n \wedge A[i] = x)$.

Negar un existencial

Pregunta

Niegue "x aparece en A": $\quad \exists i\,(0 \le i < n \wedge A[i] = x)$.

Respuesta

$$
\begin{aligned}
& \neg\exists i\,(0 \le i < n \wedge A[i] = x) && \\
\equiv\ & \forall i\,\neg(0 \le i < n \wedge A[i] = x) && \text{negación de } \exists \\
\equiv\ & \forall i\,(0 \le i < n \to A[i] \neq x) && \neg(p \wedge q) \equiv p \to \neg q
\end{aligned}
$$

En palabras: ninguna posición válida guarda x.

Errores comunes al negar

Negar también el rango

$\exists i\,(\neg(0 \leq i < n) \wedge A[i] \leq 0)$ habla de posiciones fuera del arreglo. El rango dice dónde se mira y no se niega.

Dejar el cuantificador como estaba

$\forall i\,(0 \leq i < n \rightarrow A[i] \leq 0)$ dice "todos son no positivos". La negación de "todos son positivos" es más débil: basta con uno.

Negar mal la desigualdad

$\neg(A[i] > 0)$ es $A[i] \leq 0$, no $A[i] < 0$: el cero también contradice.

Ejercicio 3 (intermedio)

Negar

Niegue cada fórmula, lleve la negación hasta adentro y diga el resultado en palabras:

1. $\forall i\,(0 \leq i < n-1 \rightarrow A[i] \leq A[i+1])$
2. $\forall s\,\forall t\,(0 \leq s < t < n \rightarrow A[s] \neq A[t])$

Solución del ejercicio 3

Punto 1

$$\neg \forall i \, (0 \leq i < n - 1 \rightarrow A[i] \leq A[i + 1])$$
$$\equiv \exists i \, (0 \leq i < n - 1 \wedge A[i] > A[i + 1])$$

Hay dos vecinos en desorden: A no está ordenado.

Solución del ejercicio 3

Punto 2

$$\begin{aligned} &\neg \forall s \, \forall t \, (0 \leq s < t < n \rightarrow A[s] \neq A[t]) \\ \equiv\ &\exists s \, \exists t \, (0 \leq s < t < n \wedge A[s] = A[t]) \end{aligned}$$

Hay dos posiciones distintas con el mismo valor: A tiene repetidos. Cada $\forall$ pasa a $\exists$, y el rango $0 \leq s < t < n$ queda igual.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula
- Concepto
- Ejemplo: propiedades del mundo real
- Ejemplo: propiedades de un arreglo
- Ejercicios

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Traducir en cuatro pasos

Pasos

1. Fijar el dominio y los predicados.
2. Decidir el cuantificador: “todo”, “ninguno” o “existe”.
3. Escribir el rango de cada variable.
4. Probar la fórmula con un caso que cumple la frase y con uno que no.

Todo inscrito tiene nota

Pregunta

Dominio: las personas de la lista de un curso. Predicados: $I(e)$, "e está inscrito"; $N(e)$, "e tiene nota".

Escriba: "todo inscrito tiene nota".

Todo inscrito tiene nota

Pregunta

Dominio: las personas de la lista de un curso. Predicados: $I(e)$, "e está inscrito"; $N(e)$, "e tiene nota". Escriba: "todo inscrito tiene nota".

Respuesta

$$\forall e\,(I(e) \to N(e))$$

El predicado $I(e)$ hace de rango: la propiedad se exige solo a los inscritos. Quien está en la lista sin inscribirse no la contradice.

Ningún horario se cruza con otro

Pregunta

Dominio: los horarios de clase de un estudiante. Predicado: $C(a, b)$, "a y b ocupan una misma hora".

Escriba: "ningún horario se cruza con otro".

Ningún horario se cruza con otro

Pregunta

Dominio: los horarios de clase de un estudiante. Predicado: $C(a, b)$, "a y b ocupan una misma hora". Escriba: "ningún horario se cruza con otro".

Respuesta

$$\neg\exists a\,\exists b\,(a \neq b \wedge C(a,b)) \;\equiv\; \forall a\,\forall b\,(a \neq b \rightarrow \neg C(a,b))$$

Sin $a \neq b$

$\forall a\,\forall b\,\neg C(a,b)$ es falsa en cuanto haya un horario: con $b = a$, todo horario ocupa la misma hora que él mismo.

Un estudiante que aprobó todas las materias

Pregunta

Dominios: e recorre los estudiantes de un grupo y m las materias que todos cursan. Predicado: $Ap(e, m)$, "e aprobó m".

Escriba: "hay un estudiante que aprobó todas las materias".

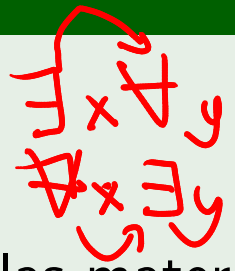
Un estudiante que aprobó todas las materias

Pregunta

Escriba: “hay un estudiante que aprobó todas las materias”.

Respuesta

$$\exists e \, \forall m \; Ap(e, m)$$



Primero se escoge al estudiante y después se recorren las materias con ese estudiante fijo.

El orden de los cuantificadores cambia la frase

$\forall m \, \exists e \; Ap(e, m)$ dice “toda materia la aprobó alguien”. Con dos materias, Ana aprobó solo Cálculo y Beto solo Física: la segunda fórmula es verdadera y la primera es falsa.

A está ordenado ascendentemente

Pregunta

Escriba: "$A[0..n-1]$ está ordenado de menor a mayor", admitiendo valores repetidos.

A está ordenado ascendentemente

Pregunta

Escriba: "$A[0..n-1]$ está ordenado de menor a mayor", admitiendo valores repetidos.

Respuesta

$$\forall i\,(0 \leq i < n-1 \rightarrow A[i] \leq A[i+1])$$

Cada elemento se compara con su vecino de la derecha.

El rango termina en $n-2$

Con $0 \leq i < n$, el último caso es $i = n-1$ y compara con $A[n]$, que no existe. Y con $<$ en lugar de $\leq$, el arreglo $[2, 5, 5]$ deja de contar como ordenado.

Traza: ¿está ordenado?

$\forall i\,(0 \leq i < n-1 \rightarrow A[i] \leq A[i+1])$ con $A = [2,5,5,9,4]$, $n = 5$

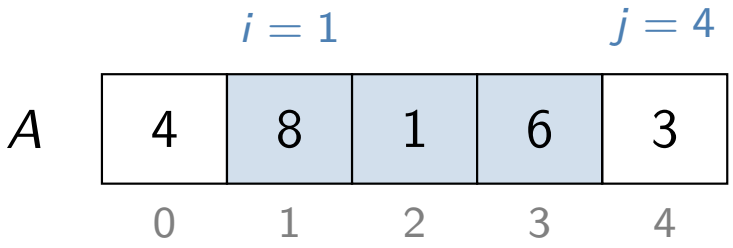
El rango es $0 \leq i < 4$.

i	$A[i]$	$A[i+1]$	$A[i] \leq A[i+1]$
0	2	5	V
1	5	5	V
2	5	9	V
3	9	4	F

La fórmula es falsa con contraejemplo $i = 3$. Sin el último elemento, $A = [2,5,5,9]$, las tres filas que quedan son verdaderas y la fórmula también.

Un valor aparece en el rango $[i..j)$

El rango $[i..j)$ son las posiciones t con $i \leq t < j$: incluye i y deja fuera j.



Fórmula

"x aparece en $A[i..j)$": $\exists t\,(i \leq t < j \wedge A[t] = x)$.

La variable cuantificada es t, distinta de i y j, que son datos de la fórmula.

Traza: ¿aparece en [1..4)?

Pregunta

Con $A = [4, 8, 1, 6, 3]$, $i = 1$ y $j = 4$: ¿aparece $x = 6$? ¿Aparece $x = 3$?

Traza: ¿aparece en [1..4)?

Pregunta

Con $A = [4, 8, 1, 6, 3]$, $i = 1$ y $j = 4$: ¿aparece $x = 6$? ¿Aparece $x = 3$?

Respuesta

t	$A[t]$	$A[t] = 6$	$A[t] = 3$
1	8	F	F
2	1	F	F
3	6	V	F

$x = 6$ aparece, con testigo $t = 3$. Para $x = 3$ la fórmula es falsa: $A[4] = 3$, pero $t = 4$ no cumple $t < j$.

m es el máximo de A

Pregunta

Sea $n \geq 1$. Escriba: "m es el máximo de $A[0..n-1]$".

m es el máximo de A

Primer intento

"Ningún elemento supera a m": $\forall t\,(0 \leq t < n \to A[t] \leq m)$.

Contraejemplo

Con $A = [4, 8, 1, 6, 3]$ y $m = 100$ la fórmula es verdadera, y 100 no es el máximo. La fórmula dice que m es una cota superior; falta exigir que m esté en el arreglo.

m es el máximo de A

Respuesta

$$\exists t\,(0 \leq t < n \wedge A[t] = m) \;\wedge\; \forall t\,(0 \leq t < n \rightarrow A[t] \leq m)$$

La primera parte dice que m está en A; la segunda, que ningún elemento lo supera.

Comprobación con $A = [4, 8, 1, 6, 3]$

- $m = 8$: aparece en $t = 1$, y los cinco valores son ≤ 8. Verdadera.
- $m = 100$: no aparece. Falsa.
- $m = 6$: aparece en $t = 3$, pero $A[1] = 8 > 6$. Falsa.

Sea $G(V, E)$, $\forall (u,v) \in E \rightarrow w(u,v) \geq 0$

Sea un grafo con V vertices y E aristas, la función de peso w en todas las aristas es >= 0.

A no tiene repetidos

Pregunta

Escriba: “ningún valor se repite en $A[0..n-1]$”.

A no tiene repetidos

Respuesta

$$\forall s \, \forall t \, (0 \leq s < t < n \rightarrow A[s] \neq A[t])$$

La condición $s < t$ cumple el papel de $a \neq b$ en los horarios: evita comparar una posición consigo misma, y además revisa cada pareja una sola vez.

A no tiene repetidos

Traza con $A = [4, 1, 7, 1]$, $n = 4$

(s, t)	$A[s]$	$A[t]$	$A[s] \neq A[t]$
$(0, 1)$	4	1	V
$(0, 2)$	4	7	V
$(0, 3)$	4	1	V
$(1, 2)$	1	7	V
$(1, 3)$	1	1	F
$(2, 3)$	7	1	V

La pareja $(1, 3)$ la contradice: la fórmula es falsa.

Errores comunes al traducir

Olvidar el rango

$\forall i\ A[i] > 0$ pregunta por $A[-1]$ y $A[n]$. Toda variable que indexa un arreglo lleva su rango.

Cruzar los conectivos

El universal lleva $\rightarrow$ y el existencial lleva $\wedge$. Cambiarlos da fórmulas que valen para todo arreglo o para ninguno.

Comparar un elemento consigo mismo

En "ningún horario se cruza" y "sin repetidos" hacen falta $a \neq b$ o $s < t$.

Reusar la letra de un dato

En "x aparece en $[i..j)$", escribir $\exists i\,(i \leq i < j \wedge \dots)$ pierde el dato i. La variable cuantificada lleva letra nueva.

Ejercicio 4 (intermedio)

Traducir y evaluar

Escriba como fórmula, con su rango:

1. Todos los elementos de $A[0..n-1]$ son pares.
2. A tiene al menos un cero en el rango $[i..j)$.
3. A está ordenado de mayor a menor, sin repetidos.

Evalúe la fórmula del punto 3 con $A = [9, 7, 7, 2]$ en una tabla.

Solución del ejercicio 4

Fórmulas

1. $\forall t\,(0 \leq t < n \to A[t] \text{ mód } 2 = 0)$.
2. $\exists t\,(i \leq t < j \wedge A[t] = 0)$.
3. $\forall t\,(0 \leq t < n - 1 \to A[t] > A[t+1])$.

En el punto 3 la desigualdad estricta excluye los repetidos, porque dos iguales en un arreglo ordenado quedan vecinos.

Solución del ejercicio 4

Traza del punto 3 con $A = [9, 7, 7, 2]$

t	$A[t]$	$A[t+1]$	$A[t] > A[t+1]$
0	9	7	V
1	7	7	F
2	7	2	V

Falsa, con contraejemplo $t = 1$.

Ejercicio 5 (avanzado)

Dos arreglos

Sean $A[0..n-1]$ y $B[0..m-1]$. Escriba: "todo valor de A aparece en B".

Evalúela con $A = [3, 1, 3]$, $B = [1, 2, 3]$, y con $A = [3, 5]$, $B = [1, 2, 3]$.

Solución del ejercicio 5

Fórmula

$$\forall s\,(0 \leq s < n \to \exists t\,(0 \leq t < m \wedge A[s] = B[t]))$$

Cada posición de A tiene su propio testigo t en B: el $\exists$ va dentro del $\forall$.

Solución del ejercicio 5

Evaluación

A	s	$A[s]$	testigo t en $B = [1,2,3]$	
$[3,1,3]$	0	3	2	V
	1	1	0	V
	2	3	2	V
$[3,5]$	0	3	2	V
	1	5	ninguno	F

Verdadera para $[3,1,3]$ y falsa para $[3,5]$, con contraejemplo $s = 1$.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O
- Concepto
- Ejemplo
- Ejercicio

6 Referencias

La definición como fórmula

Notación O

$f \in O(g)$ si existen $c > 0$ y $k \geq 0$ tales que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo $n \geq k$:

$$\exists c \, \exists k \, (c > 0 \land k \geq 0 \land \forall n \, (n \geq k \to f(n) \leq c \cdot g(n)))$$

Las partes de la fórmula

- $\exists c \, \exists k$ con $c > 0$, $k \geq 0$: los **testigos**. Se escogen primero y quedan fijos.
- $\forall n \, (n \geq k \to \ldots)$: el rango de n arranca en k.
- $f(n) \leq c \cdot g(n)$: la propiedad que se pide en cada n del rango.

Para $f(n) = 3n + 5$ y $g(n) = n$ sirven $c = 4$ y $k = 5$.

Una constante que alcance

Pregunta

Sea $f(n) = 3n + 5$. ¿Existe una constante c tal que $3n + 5 \leq c \cdot n$ para todos los n desde algún punto en adelante?

Un primer intento: $c = 3$

Pregunta

Sea $f(n) = 3n + 5$. ¿Existe una constante c tal que $3n + 5 \leq c \cdot n$ para todos los n desde algún punto en adelante?

Con $c = 3$

$3n + 5 \leq 3n$ equivale a $5 \leq 0$. Es falsa para todo n: $c = 3$ no sirve.

Un segundo intento: $c = 4$

Con $c = 4$

$3n + 5 \leq 4n$ equivale a $5 \leq n$.

n	$f(n) = 3n + 5$	$4n$	$f(n) \leq 4n$
3	14	12	F
4	17	16	F
5	20	20	V
6	23	24	V
10	35	40	V

La desigualdad falla al comienzo y se cumple desde $n = 5$. Ese punto de arranque es el testigo k de la definición.

Demostración: $3n + 5 \in O(n)$

Teorema

$3n + 5 \in O(n)$.

Estrategia

Demostración directa: exhibir los testigos c y k y comprobar la desigualdad para todo $n \geq k$.

Desarrollo

Se toman $c = 4$ y $k = 5$. Sea $n \geq 5$. Entonces $5 \leq n$, y sumando $3n$ a los dos lados:

$$3n + 5 \leq 3n + n = 4n = c \cdot n.$$

Demostración: $3n + 5 \in O(n)$

Conclusión

Con los testigos $c = 4$ y $k = 5$ se cumple $3n + 5 \leq c \cdot n$ para todo $n \geq k$; por tanto $3n + 5 \in O(n)$.

Los testigos no son únicos

Con $c = 8$ y $k = 1$: si $n \geq 1$, entonces $5 \leq 5n$ y $3n + 5 \leq 8n$.

La negación de $f \in O(g)$

Pregunta

¿Qué hay que mostrar para afirmar que $f \notin O(g)$? Niegue la fórmula de la definición.

La negación de $f \in O(g)$

Respuesta

Se aplican las mismas leyes, de afuera hacia adentro, y los rangos $c > 0$ y $k \geq 0$ se conservan:

$$f \notin O(g) \equiv \forall c \, \forall k \, (c > 0 \land k \geq 0 \to \exists n \, (n \geq k \land f(n) > c \cdot g(n)))$$

En palabras: para cualquier pareja de testigos hay un n desde k en adelante donde f supera a $c \cdot g$.

Ejemplo: $n^2 \notin O(n)$

Dados $c > 0$ y $k \geq 0$ cualesquiera, se toma $n = \text{máx}(k, \lfloor c \rfloor + 1)$.
Entonces $n \geq k$ y $n > c$, así que $n^2 = n \cdot n > c \cdot n$.

Con $c = 10$ y $k = 3$, ese n es 11: $121 > 110$.

Errores comunes con la definición de O

Una tabla no es una demostración

La tabla mostró dónde arranca la desigualdad. La demostración la comprueba para *todo* $n \geq k$, con una cuenta que no depende de un n particular.

Testigos que dependen de n

c y k se escogen antes de n. Un c que cambia con n, como $c = n$, no es una constante.

Negar los rangos de los testigos

En la negación siguen $c > 0$ y $k \geq 0$. Escribir $c \leq 0$ cambia el problema.

Ejercicio 6 (avanzado)

La definición de O

1. Demuestre en cuatro partes que $2n^2 + 3n \in O(n^2)$ y señale los testigos c y k.
2. Alguien propone como definición $\forall n \, \exists c \, (c > 0 \wedge f(n) \leq c \cdot g(n))$. Muestre que con esa fórmula n^2 quedaría en $O(n)$ y diga qué cambió respecto de la definición.

Solución del ejercicio 6, punto 1

Teorema

$2n^2 + 3n \in O(n^2)$.

Estrategia

Demostración directa: acotar $3n$ por un múltiplo de n^2 y leer los testigos de la cuenta.

Desarrollo

Se toman $c = 5$ y $k = 1$. Sea $n \geq 1$. Multiplicando $1 \leq n$ por $3n \geq 0$ se obtiene $3n \leq 3n^2$, y entonces

$$2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n^2 = 5n^2 = c \cdot n^2.$$

Solución del ejercicio 6, punto 1

Conclusión

Con los testigos $c = 5$ y $k = 1$ se cumple $2n^2 + 3n \leq c \cdot n^2$ para todo $n \geq k$; por tanto $2n^2 + 3n \in O(n^2)$.

Solución del ejercicio 6, punto 2

n^2 cumpliría la fórmula propuesta con $g(n) = n$

- Si $n \geq 1$, se toma $c = n$: $n^2 \leq n \cdot n$.
- Si $n = 0$, se toma $c = 1$: $0 \leq 1 \cdot 0$.

Para cada n hay un c, así que la fórmula es verdadera, aunque $n^2 \notin O(n)$.

Qué cambió

Con $\forall n \exists c$, el c se escoge después de n y puede crecer con él. La definición escribe $\exists c \exists k \forall n$: una sola constante tiene que servir para todos los $n \geq k$. Además, la fórmula propuesta perdió el testigo k.

Contenido

1 Proposiciones y conectivos

2 La implicación, su recíproca y su contrarrecíproca

3 Predicados y cuantificadores

4 De la frase a la fórmula

5 Leer la definición de O

6 Referencias

Referencias

- K. H. Rosen. *Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones*. McGraw-Hill. Capítulo 1: lógica proposicional, equivalencias, predicados y cuantificadores, y su negación.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest y C. Stein. *Introduction to Algorithms*, 3.ª edición, MIT Press, 2009. Sección 3.1: notación asintótica.