Repaso de grafos

Definiciones, terminología y familias

Carlos A Delgado S

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Septiembre de 2026

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Lo que traemos

Tres nombres que conviene separar

- **Estructura de datos**: determina la forma en que se representa y se organiza la información.
- **Tipo de dato**: la representación particular de un conjunto de valores, con sus valores posibles y sus operaciones.
- **Tipo abstracto de dato**: la definición de un conjunto de valores, sus operaciones y sus propiedades, sin comprometerse con una implementación.

Lo que traemos

La distinción que se va a usar hoy

Una cola es un tipo abstracto: encolar, desencolar, mirar el frente. Que por debajo sea un arreglo circular o una lista enlazada no cambia lo que la cola promete. Un grafo también va a ser un tipo abstracto, y va a tener tres implementaciones distintas.

Las estructuras lineales

Lo que ofrece cada una

Estructura	**Operación**	**Costo**
Arreglo, lista nativa	acceso por índice	$O(1)$
Lista enlazada	insertar o borrar al frente	$O(1)$
Pila	apilar, desapilar	$O(1)$
Cola	encolar, desencolar	$O(1)$
Mapa	consultar por llave	$O(1)$ promedio
Conjunto	pertenencia	$O(1)$ promedio

Las estructuras lineales

Lo que tienen en común

Todas ordenan los datos uno detrás de otro, o los indexan por una llave. Contestan “¿cuál sigue?” y “¿está este valor?”. Ninguna contesta “¿quién está conectado con quién?”.

Direccionamiento directo y conjuntos

Por posición

Índice	Valor
0	a
1	b
2	c
3	d
4	e

Arreglos, vectores, listas nativas.

Por llave

Llave	Valor
k1	a
k2	b
k3	c
k4	d
k5	e

Mapas y diccionarios.

Conjuntos

$\{a, b, c, d, e\}$: los elementos están, sin orden y sin repetición. La pregunta que contestan es la pertenencia.

Datos que no se acuestan en una línea

Jerarquías

Laborales, sociales, económicas, políticas: cada elemento tiene encima y debajo a otros, y no siempre uno solo.

Conexiones

Redes sociales, redes eléctricas, redes viales: lo que importa no es el orden de los elementos sino qué par de elementos está unido.

Las dos preguntas

- ¿Es posible representar estos datos con las estructuras anteriores?
- ¿Hay algún tipo abstracto de dato debajo de esta información?

El intento con lo que ya tenemos

Amistades entre cinco personas

Ana y Beto son amigos; Ana y Carlos también; Beto y Diana; Elena no conoce a nadie.

Primer intento: una lista

```
personas = ["Ana", "Beto", "Carlos", "Diana", "Elena"]
```

La lista guarda quiénes son, y ahí se detiene. La amistad es una relación entre dos, y en la lista no cabe.

El intento con lo que ya tenemos

Segundo intento: un mapa de listas

```
amigos = {"Ana": ["Beto", "Carlos"], "Beto": ["Ana", "Diana"],
          "Carlos": ["Ana"], "Diana": ["Beto"], "Elena": []}
```

Esto sí guarda la relación, y está hecho con las estructuras de siempre. Lo que falta no es la implementación: falta nombrar la estructura, definir sus operaciones y saber qué cuesta cada una.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

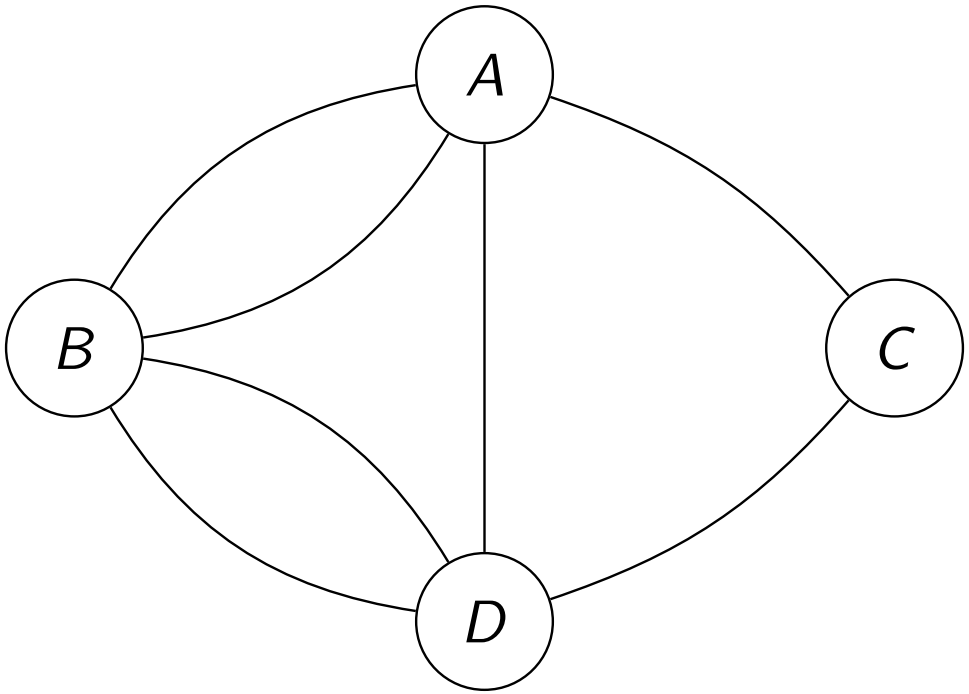
7 Ejercicios

8 Referencias

Los puentes de Königsberg

El problema de 1736

La ciudad estaba partida por el río Pregel, que formaba dos islas unidas entre sí y con las orillas por siete puentes. La pregunta de sus habitantes: ¿se puede salir de cualquier punto, cruzar cada puente exactamente una vez y volver al punto de partida?



Los puentes de Königsberg

Lo que hizo Euler

Demostró que ese recorrido no existe. Su argumento no usa distancias ni formas: solo cuántos puentes llegan a cada región. Ese descarte de todo lo demás es lo que queda cuando uno se queda con el grafo.

Definición de grafo

Definición (Grafo, CLRS Apéndice B.4, p. 1168)

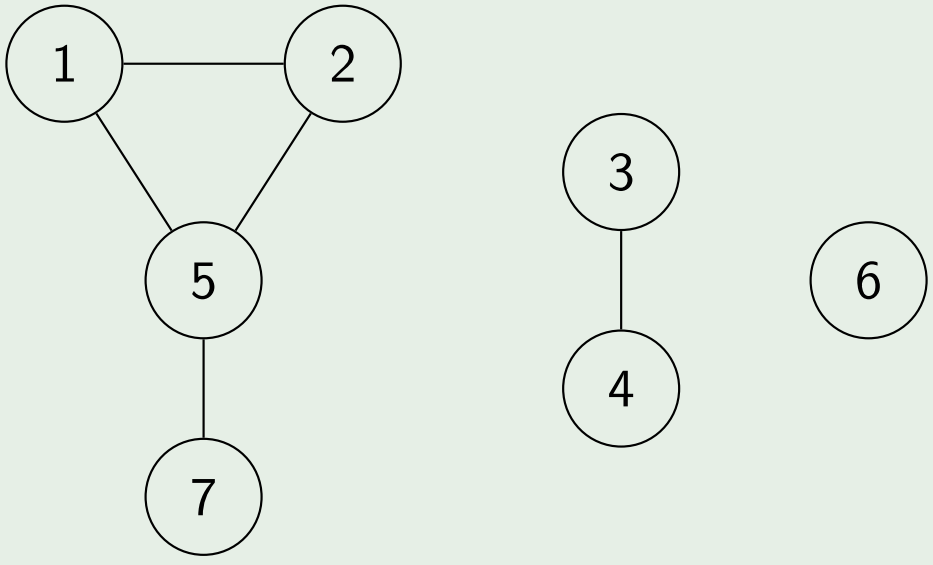
Un grafo G es una pareja (V, E) donde

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es un conjunto de nodos o vértices, y*
- $E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)\}$ *es un conjunto de arcos o aristas entre elementos de V, es decir, $a_i \in V$ y $b_i \in V$ para todo i.*

Definición de grafo

Un grafo de siete vértices y cinco aristas

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$.



El vértice 6 no tiene aristas y sigue siendo parte del grafo.

Propiedades básicas

Grafo vacío

El grafo $(\emptyset, \emptyset)$ se escribe $\emptyset$: no tiene vértices ni aristas.

Orden

El número de vértices de G es su orden, denotado $|G|$.

Grafo trivial

Un grafo de orden 0 o 1. Un grafo puede ser finito o infinito según su orden; en el curso son siempre finitos.

Un grafo sin ninguna arista

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $E = \emptyset$: ocho vértices sueltos. Sigue siendo un grafo, y más adelante va a ser el caso límite de varios algoritmos.

Grafo simple

Definición (Grafo simple)

Un grafo simple $G = (V, E)$ cumple tres condiciones:

- *cada arista conecta dos vértices diferentes;*
- *no hay aristas paralelas, es decir, dos aristas nunca conectan el mismo par de vértices;*
- *no hay bucles, aristas que unan un vértice consigo mismo.*

Por qué es el caso de referencia

Al no permitir aristas múltiples ni bucles, la relación entre dos vértices es binaria: están conectados o no lo están. Los demás tipos se definen relajando alguna de las tres condiciones.

Multigrafo y pseudografo

Definición (Multigrafo)

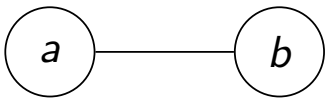
Un multigrafo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$. Las aristas e_1 y e_2 son paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$. Permite aristas múltiples, no bucles.

Definición (Pseudografo)

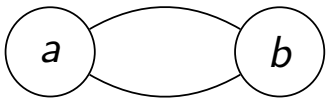
Un pseudografo $G = (V, E)$ tiene la misma forma con f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Una arista e es un bucle si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$. Permite aristas paralelas y bucles.

Multigrafo y pseudografo

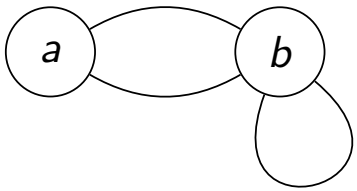
simple



multigrafo



pseudografo



Grafos dirigidos y no dirigidos

Definición (No dirigido)

$G = (V, E)$ con V conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ tal que E es simétrica: si $(u, v) \in E$ entonces $(v, u) \in E$.

Definición (Dirigido)

$G = (V, E)$ con V conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$. Cada $(a, b) \in E$ es un arco que va de a hacia b.

La diferencia que importa

En el dirigido, (u, v) no es lo mismo que (v, u). Que exista el arco de u a v no dice nada sobre el arco de v a u. Un grafo no dirigido es el caso particular en que los dos siempre van juntos.

Grafos dirigidos y no dirigidos

Multigrafo dirigido

Igual al multigrafo, con f de E en $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$: los arcos tienen dirección y puede haber varios entre el mismo par.

Los cinco tipos

Tipo	**Aristas**	**Paralelas**	**Bucles**
Grafo simple	no dirigidas	no	no
Multigrafo	no dirigidas	sí	no
Pseudografo	no dirigidas	sí	sí
Grafo dirigido	dirigidas	no	sí
Multigrafo dirigido	dirigidas	sí	sí

Cómo se clasifica uno que le den

1. Mirar si las aristas tienen dirección.
2. Buscar dos aristas entre el mismo par de vértices.
3. Buscar aristas de un vértice a sí mismo.

Los cinco tipos

Lo que se usa en el curso

Casi todo lo que viene trabaja sobre grafos simples y sobre grafos dirigidos. Los otros tres aparecen cuando el problema los impone, como los siete puentes.

Grafos con peso

Definición (Grafo con peso)

Un grafo dirigido con peso es un grafo $G = (V, E)$ *con una función de peso* $f : E \to \mathbb{R}$.

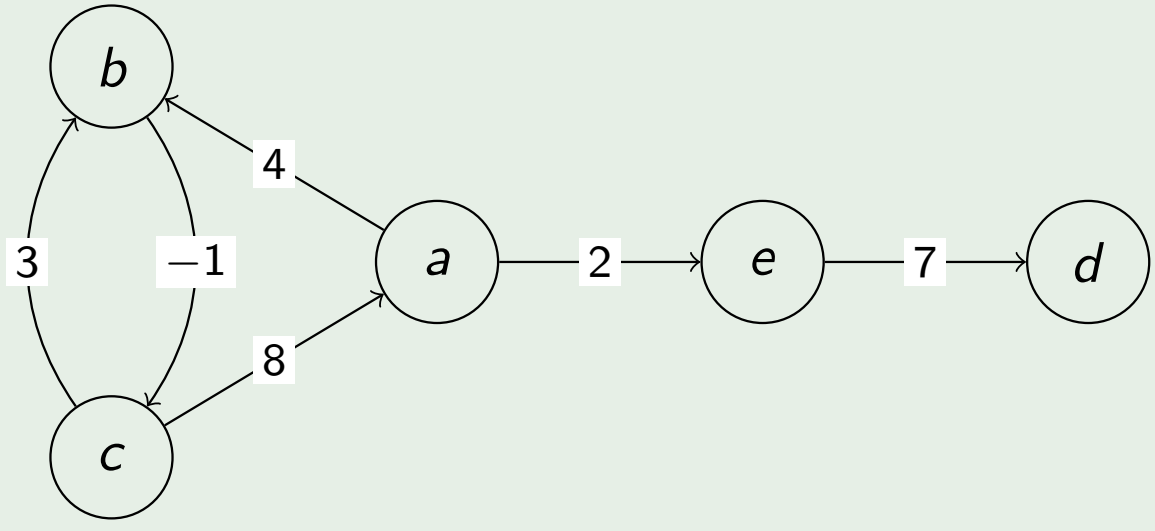
El peso no tiene por qué ser una distancia

Puede ser tiempo, costo, capacidad o probabilidad. Y puede ser negativo: eso va a decidir cuál algoritmo de caminos más cortos sirve.

Grafos con peso

Un grafo con peso

$V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b), (a, e), (b, c), (c, a), (c, b), (e, d)\}$, con $f((a, b)) = 4$, $f((a, e)) = 2$, $f((b, c)) = -1$, $f((c, a)) = 8$, $f((c, b)) = 3$, $f((e, d)) = 7$.



Dónde aparecen

Amigos en una red social

Cada persona es un vértice y cada amistad una arista. Sin dirección si la amistad es mutua, con dirección si es un "sigue a".

Redes

Los nodos son equipos o postes y las aristas los enlaces. Aquí el peso suele ser distancia, latencia o capacidad.

Rutas del MIO

Las estaciones son vértices y los tramos de ruta son aristas. Universidades, Univalle, Buitrera, Capri, Pampalinda, Plaza de Toros, Unidad Deportiva por un lado; Calipso y Menga por otro.

Árbol genealógico

Las personas son vértices y las aristas van de padre a hijo. Un árbol es un grafo con una restricción encima, y esa restricción se estudia al final del curso.

Dónde aparecen

Lo que se gana al modelar así

Un algoritmo escrito sobre grafos sirve para los cuatro casos. La ruta más corta entre dos estaciones del MIO y el grado de separación entre dos personas son el mismo problema.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Adyacencia, incidencia y vecindad

Definición (Adyacencia)

Dos vértices u y v de un grafo no dirigido G son adyacentes, o vecinos, si $\{u, v\}$ es una arista de G.

Definición (Incidencia)

Si $e = \{u, v\}$, la arista e es incidente con los vértices u y v, y conecta a u con v. Los vértices u y v son los extremos de e. Dos aristas son adyacentes si comparten un vértice.

Definición (Vecindad)

La vecindad de un vértice x, denotada $N(x)$, es el conjunto de todos los vértices adyacentes a x.

Adyacencia, incidencia y vecindad

En el grafo de siete vértices

$N(5) = \{1, 2, 7\}$, $N(3) = \{4\}$ y $N(6) = \emptyset$.

Grado de un vértice

Definición (Grado)

El grado de un vértice v en un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él. Se denota $\delta(v)$. Los bucles cuentan dos veces, porque tocan al vértice por sus dos extremos.

Dos nombres

Un vértice de grado 0 es **aislado**. Uno de grado 1 es **colgante**.

Grados del grafo de siete vértices

v	1	2	3	4	5	6	7
$\delta(v)$	2	2	1	1	3	0	1

El 6 es aislado; el 3, el 4 y el 7 son colgantes.

Teorema del apretón de manos

Teorema (Apretón de manos, CLRS Ejercicio B.4-1)

Sea $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido con* e *aristas. Entonces*

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v).$$

Teorema del apretón de manos

Demostración

Se procede de forma directa, contando el mismo objeto de dos maneras. Un par (arista, extremo suyo) se puede contar recorriendo las aristas, y cada arista aporta exactamente 2 de esos pares, uno por cada extremo; el total es $2e$. El mismo par se puede contar recorriendo los vértices, y cada vértice v aporta $\delta(v)$ pares, uno por cada arista incidente con él; el total es $\sum_{v \in V} \delta(v)$. Como los dos conteos cuentan lo mismo, las dos cantidades son iguales. Por lo tanto, se puede concluir que $2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$.

En el grafo de siete vértices

$\sum_v \delta(v) = 2 + 2 + 1 + 1 + 3 + 0 + 1 = 10 = 2 \cdot 5$, y en efecto tiene 5 aristas.

Para qué sirve contar así

Contar aristas sin dibujar el grafo

¿Cuántas aristas tiene un grafo de 10 vértices, todos de grado 6?
$2e = 10 \cdot 6 = 60$, luego $e = 30$.

Descartar un grafo imposible

¿Existe un grafo simple de 15 vértices, todos de grado 5?
$2e = 15 \cdot 5 = 75$, que es impar. No existe, y no hubo que intentar dibujarlo.

Corolario

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Para qué sirve contar así

Demostración

Se procede de forma directa. Sea V_1 el conjunto de vértices de grado par y V_2 el de grado impar. Entonces

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v).$$

El lado izquierdo es par por ser $2e$, y $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es par por ser suma de números pares. Al despejar, $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ es diferencia de dos pares, luego es par. Cada sumando de esa suma es impar, y una suma de impares es par únicamente cuando hay un número par de sumandos. Por lo tanto, se puede concluir que $|V_2|$ es par.

Grados en grafos dirigidos

Definición (Grado de entrada y de salida, CLRS Apéndice B.4)

En un grafo dirigido, el grado de entrada $\delta^-(v)$ es el número de arcos que tienen a v como vértice final, y el grado de salida $\delta^+(v)$ es el número de arcos que tienen a v como vértice inicial. Si (u, v) es un arco, u es el inicial y v el final.

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|.$$

Grados en grafos dirigidos

Demostración

Se procede de forma directa. Cada arco (u, v) tiene exactamente un vértice inicial y exactamente uno final, de modo que aporta 1 a $\delta^+(u)$ y 1 a $\delta^-(v)$, y no aporta nada a los demás vértices. Al sumar sobre todos los vértices, cada una de las dos sumas cuenta cada arco una sola vez. Por lo tanto, se puede concluir que las dos sumas valen $|E|$.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Grafo completo K_n

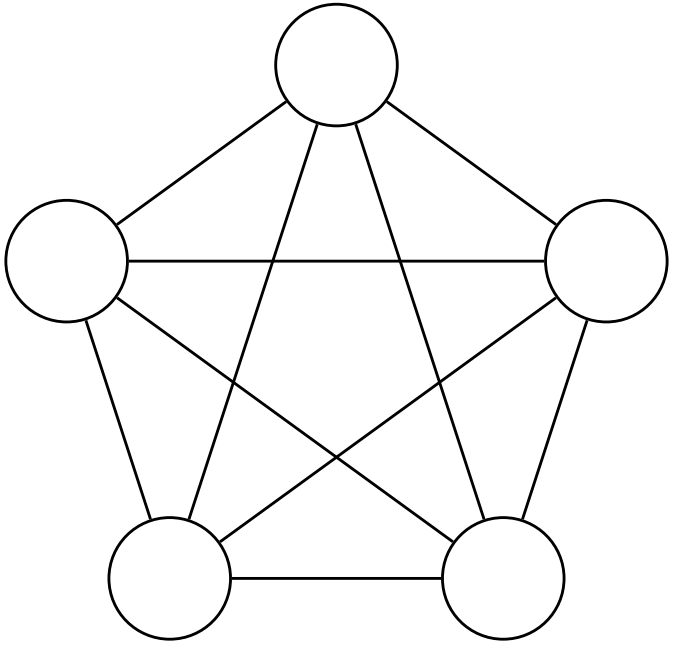
Definición (Grafo completo)

El grafo completo de n vértices, denotado K_n, es el grafo simple que tiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Cuántas aristas tiene

Cada vértice tiene grado $n-1$, así que por el apretón de manos $2e = n(n-1)$ y entonces $e = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Para $n = 1, \ldots, 6$ eso da $0, 1, 3, 6, 10, 15$.

Grafo completo K_n



K_5

El límite superior de todo

K_n es el grafo con más aristas posible sobre n vértices. Cuando se dice que un algoritmo cuesta $O(V^2)$ en el peor caso, el peor caso es este.

Ciclos C_n y ruedas W_n

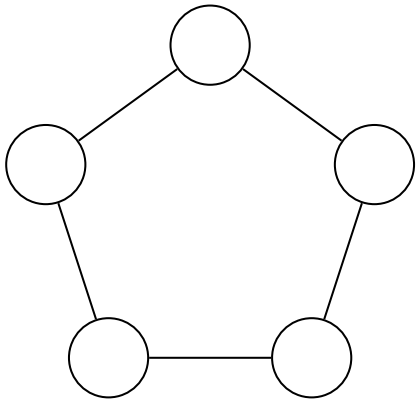
Definición (Ciclo)

El ciclo C_n, con $n \geq 3$, tiene vértices $v_1, \ldots, v_n$ y aristas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$. Cada vértice tiene grado 2 y hay n aristas.

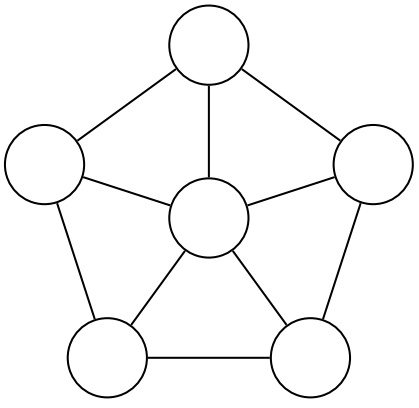
Definición (Rueda)

La rueda W_n se obtiene agregando al ciclo C_n un vértice nuevo y conectándolo con los n vértices del ciclo. Tiene $n+1$ vértices y $2n$ aristas; el centro tiene grado n y los demás grado 3.

Ciclos C_n y ruedas W_n



C_5



W_5

Bipartito completo y conteo por familia

Definición (Bipartito completo)

$K_{m,n}$ tiene sus vértices partidos en dos grupos, de tamaños m y n, sin aristas dentro de cada grupo y con todas las aristas posibles entre los dos.

Familia	**Vértices**	**Aristas**	**Grado**
K_n	n	$n(n-1)/2$	$n-1$
C_n	n	n	2
W_n	$n+1$	$2n$	no regular
$K_{m,n}$	$m+n$	$m \cdot n$	regular solo si $m = n$

Definición (Secuencia de grado)

La lista de los grados de los vértices de G, ordenada de forma decreciente. La de K_4 es $3,3,3,3$; la de C_4 es $2,2,2,2$; la de W_4 es $4,3,3,3,3$; la de $K_{2,3}$ es $3,3,2,2,2$.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

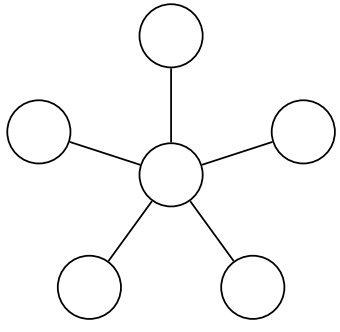
7 Ejercicios

8 Referencias

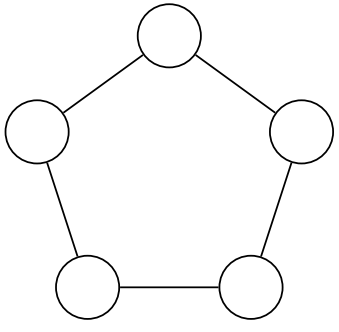
Topologías de red

Tres formas conocidas

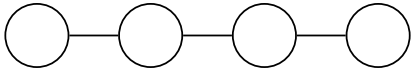
- **Estrella**: un nodo central conectado con todos los demás. Es $K_{1,n}$. Si el central falla, la red entera cae.
- **Anillo**: cada nodo conectado con exactamente dos vecinos. Es C_n, y sobrevive a la caída de un enlace.
- **Lineal**: los nodos en fila, el camino P_n. Aparece en arreglos de procesadores en cómputo paralelo.



estrella



anillo



lineal

Subgrafos

Definición (Subgrafo, CLRS Apéndice B.4)

Si $G = (V, E)$ es un grafo, entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es un subgrafo de G si $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$, con la condición de que las aristas de E_1 conecten vértices que estén en V_1.

Recubridor

G_1 es recubridor si $V_1 = V$: conserva todos los vértices y puede perder aristas.

Inducido

Para $W \subseteq V$, el subgrafo inducido $\langle W \rangle$ tiene los vértices de W y **todas** las aristas de G con sus dos extremos en W. No se puede omitir ninguna.

Subgrafos

Eliminar

Al quitar una arista e queda $G - \{e\}$, con los mismos vértices. Al quitar un vértice v queda $G - \{v\}$, que se lleva también todas las aristas incidentes con v. Estas dos operaciones son la base del análisis de conectividad y de la búsqueda de puntos de articulación.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Complemento

Definición (Complemento)

Sea G un grafo simple no dirigido de n vértices. Su complemento $\overline{G}$ tiene los mismos vértices, y dos de ellos son adyacentes en $\overline{G}$ si y solo si no lo son en G.

Cuántas aristas

Si G tiene n vértices y e aristas, entonces $\overline{G}$ tiene $\frac{n(n-1)}{2} - e$ aristas: las que le faltaban a G para ser completo.

Casos extremos

El complemento de K_n es el grafo de n vértices sin ninguna arista, llamado grafo nulo. El complemento del grafo nulo es K_n.

Complemento

Secuencia de grado

Si la de G es $d_1, d_2, \ldots, d_n$, la de $\overline{G}$ es $n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \ldots, n-1-d_1$.

Unión de grafos

Definición (Unión)

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con vértices $V_1 \cup V_2$ y aristas $E_1 \cup E_2$, denotado $G_1 \cup G_2$.

Teorema

Si G es un grafo simple de n vértices, entonces $G \cup \overline{G} = K_n$.

Demostración

Se procede de forma directa. Tómese un par cualquiera de vértices distintos u y v. Por la definición de complemento, $\{u, v\}$ es arista de G o es arista de $\overline{G}$, y nunca deja de estar en las dos. Entonces $\{u, v\}$ pertenece a $E \cup \overline{E}$, que es el conjunto de aristas de la unión. Como el par era cualquiera, la unión tiene una arista entre cada par de vértices distintos. Por lo tanto, se puede concluir que $G \cup \overline{G} = K_n$.

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Sobre grados y familias

Con el apretón de manos en la mano

1. ¿Existe un grafo simple con secuencia de grado $3, 3, 3, 3, 2$? ¿Y con $1, 2, 3, 4, 4$? ¿Y con $1, 2, 3, 4, 5$? Use el apretón de manos antes de intentar dibujarlos.
2. ¿Cuántos vértices tiene un grafo regular de grado 4 con 10 aristas?
3. Dibuje el complemento de C_5 y diga qué familia resulta.
4. Un grafo bipartito completo $K_{m,n}$ tiene 12 aristas y 7 vértices. ¿Cuánto valen m y n?

Contenido

1 De las estructuras lineales a los grafos

2 Introducción a los grafos

3 Terminología

4 Familias de grafos simples

5 Topologías y subgrafos

6 Grafos complementarios

7 Ejercicios

8 Referencias

Referencias


Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. MIT Press, 2009. Apéndice B.4 (pp. 1168–1172) y Sección 22.1 (pp. 589–593).


Rosen, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 7th ed. McGraw-Hill, 2012. Capítulo 10.


van Steen, M. *Graph Theory and Complex Networks: An Introduction*. 2010.