Caminos más cortos

Las dos versiones del problema y la idea de Bellman-Ford-Moore

Carlos A Delgado S

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Octubre de 2026

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Objetivos de la sesión

Al terminar la clase, usted podrá

- Distinguir el problema de un solo origen del de todos los pares y decir qué algoritmo resuelve cada uno, y con qué costo.
- Ejecutar la búsqueda en amplitud a mano, llenar los arreglos de distancias y de predecesores y reconstruir un camino.
- Explicar por qué un camino más corto no repite vértices y por qué un ciclo negativo deja el problema sin solución.
- Calcular los caminos más cortos de a lo sumo $0, 1, \ldots, n-1$ aristas y usar la ronda n para detectar un ciclo negativo.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Un origen y todos los pares

Un origen, múltiples destinos (SSSP)

Entrada: un grafo dirigido $G = (V, E)$ con una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ y un nodo $s \in V$.
Salida: un arreglo $A[0..|V|)$ tal que para cada $u \in [0..|V|)$, $A[u]$ es el costo del camino más corto entre s y u.

Múltiples orígenes, múltiples destinos (APSP)

Entrada: un grafo dirigido $G = (V, E)$ con una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$.
Salida: una matriz $M[0..|V|)[0..|V|)$ tal que para cada $u, v \in [0..|V|)$, $M[u][v]$ es el costo del camino más corto entre u y v.

SSSP viene de *single source shortest paths*; APSP, de *all pairs shortest paths*.

El costo de un camino

Definición (CLRS, Capítulo 24)

Sea $G = (V, E)$ dirigido con una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$. El peso de un camino $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ es

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i),$$

y el costo del camino más corto de u a v, $\delta(u, v)$, es el menor $w(p)$ entre los caminos de u a v; vale ∞ si no hay camino.

Ejemplo

Si $w(0, 2) = 4$, $w(2, 3) = 1$ y $w(0, 3) = 7$, el camino $\langle 0, 2, 3 \rangle$ pesa $4 + 1 = 5$ y el camino $\langle 0, 3 \rangle$ pesa 7: el de más aristas es el más corto, y $\delta(0, 3) = 5$ si no hay otros caminos.

Los algoritmos de cada versión

Versión	Algoritmo	Tiempo
SSSP	Búsqueda en amplitud (BFS)	$O(n+m)$
SSSP	Algoritmo para grafos dirigidos acíclicos	$O(n+m)$
SSSP	Bellman-Ford-Moore	$O(n \cdot m)$
SSSP	Dijkstra	$O((n+m)\log n)$
APSP	Floyd-Warshall	$O(n^3)$

Con $n = |V|$ y $m = |E|$.

Pregunta

¿Se puede resolver APSP con un algoritmo de SSSP?

Los algoritmos de cada versión

Respuesta

Sí: se invoca n veces, una por cada origen, y cada invocación llena una fila de M.

Cuando el grafo es denso

En un grafo denso m crece como n^2. Con Bellman-Ford-Moore, las n invocaciones cuestan $O(n \cdot n \cdot m) = O(n^4)$; con Dijkstra, $O(n \cdot n^2 \log n) = O(n^3 \log n)$. Floyd-Warshall resuelve el mismo problema en $O(n^3)$, y ahí es donde conviene.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Cuándo sirve la amplitud

CLRS, Sección 22.2

La amplitud resuelve SSSP en grafos sin peso o en grafos en los que todas las aristas tienen el mismo peso: el camino más corto es el de menos aristas.

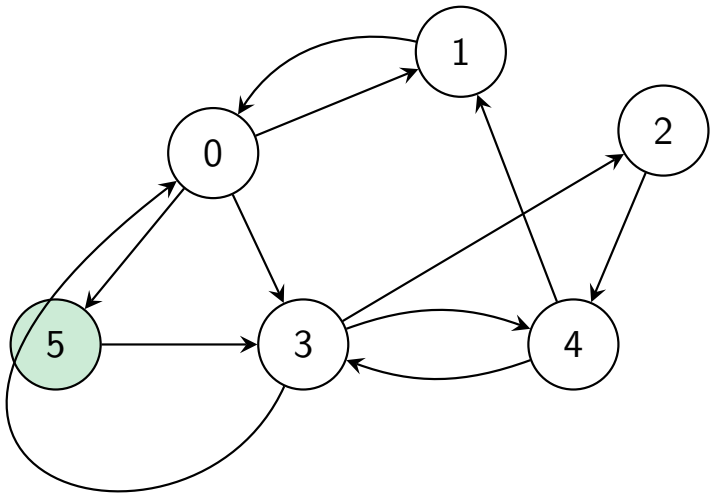
Los dos arreglos

Todos los algoritmos de la sesión, y los de las siguientes, dejan su respuesta en dos arreglos:

- `dist[v]`: el costo del camino más corto de s a v;
- `pred[v]`: el vértice anterior a v en ese camino, -1 para s y para los que no se alcanzan.

El código de la amplitud ya se vio en la unidad de recorridos y queda en la página de notas del curso.

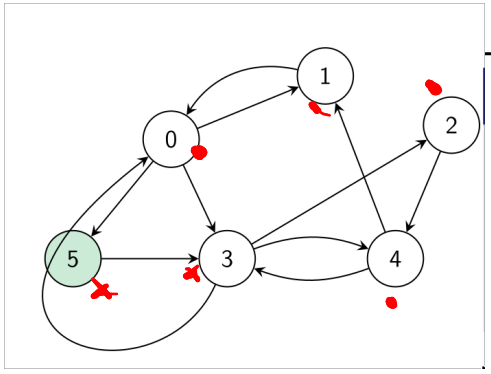
Un ejemplo de ejecución



Pregunta

Desde 5, con las listas en orden creciente, ¿en qué orden salen los vértices de la cola? ¿Qué queda en `dist` y en `pred`?

Un ejemplo de ejecución



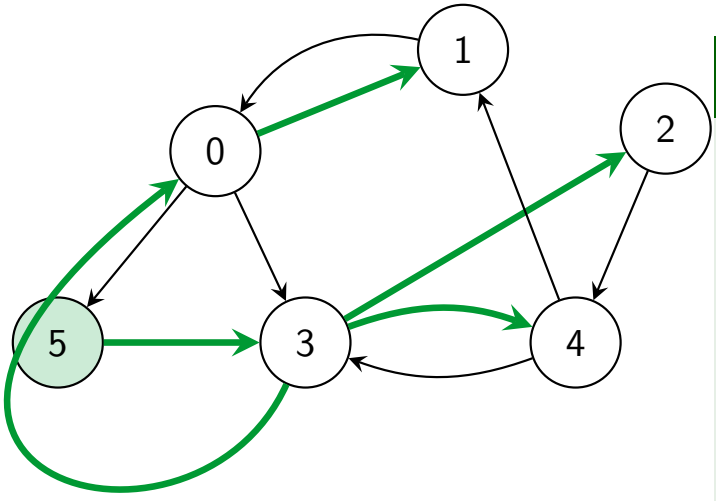
Sale	Descubre	Cola después
5	3	[3]
3	0, 2, 4	[0, 2, 4]
0	1 (3 y 5 ya se vieron)	[2, 4, 1]
2	nada (4 ya se vio)	[4, 1]
4	nada (1 y 3 ya se vieron)	[1]
1	nada (0 ya se vio)	[ ]

3 — 5

1 — 0 — 3 — 5

	0	1	2	3	4	5
dist	2	3	2	1	2	0
pred	3	0	3	5	3	−1

Reconstruir el camino



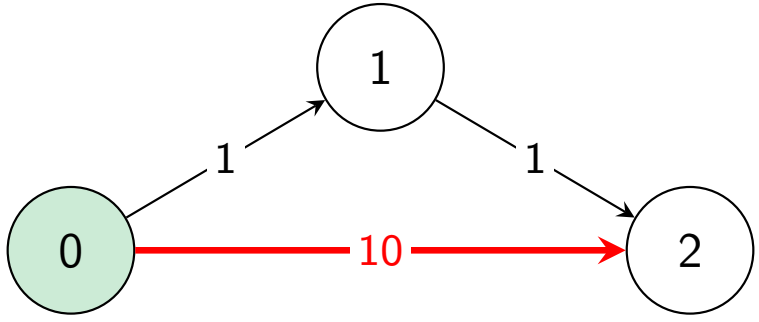
Hasta el nodo 1

Se sube por `pred` desde 1: $\texttt{pred}[1] = 0$, $\texttt{pred}[0] = 3$, $\texttt{pred}[3] = 5$ y $\texttt{pred}[5] = -1$. Leído al revés, el camino más corto es $5, 3, 0, 1$, con $\texttt{dist}[1] = 3$ aristas.

El árbol

En verde, las aristas $(\texttt{pred}[v], v)$. Forman un árbol con raíz en 5, y el camino del árbol hasta cada vértice es un camino más corto (CLRS, Teorema 22.5).

¿Y si las aristas tienen pesos distintos?



La amplitud se equivoca

Descubre 2 desde 0 en el primer nivel y ahí lo deja: `dist`[2] queda con el camino $0, 2$, que cuesta 10. El camino $0, 1, 2$ tiene una arista más y cuesta 2. Con pesos distintos hace falta poder corregir una distancia ya asignada.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

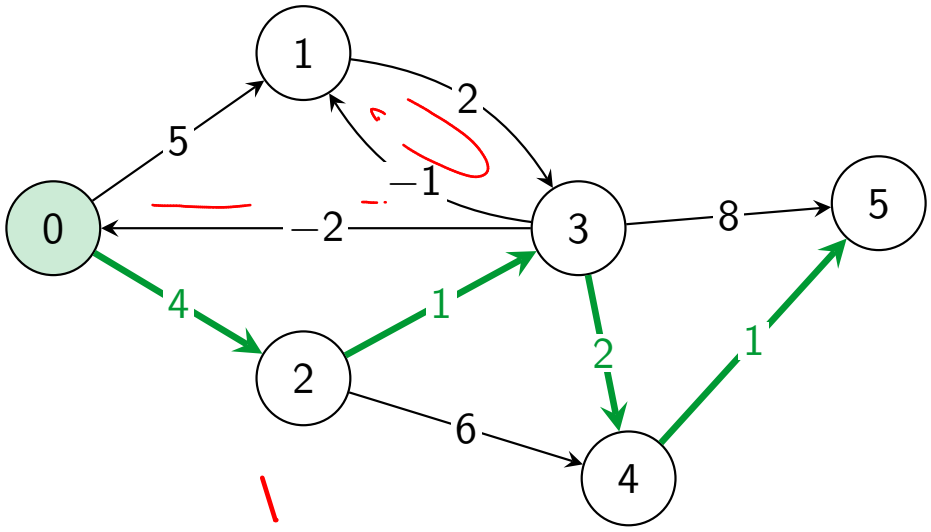
7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Un ciclo positivo nunca ayuda



Desde 0 hasta 5

El camino más corto es $0, 2, 3, 4, 5$, de costo 8. Si antes de seguir a 4 se da la vuelta $0, 2, 3, 0$, de peso $4 + 1 - 2 = 3$, el camino llega a 5 con costo 11.

	0	1	2	3	4	5
`dist`	0	4	4	5	7	8

Un ciclo positivo nunca ayuda

Por qué

Si un camino más corto pasara dos veces por el mismo vértice, el tramo entre las dos visitas sería un ciclo. Con peso positivo, quitarlo da un camino más barato, y el camino no era el más corto. Con peso cero, quitarlo da otro camino del mismo costo.

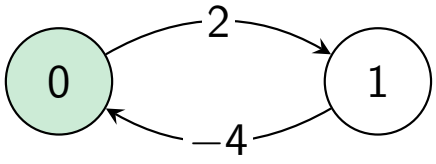
Una arista negativa no es un problema

El grafo tiene dos aristas negativas y todas las distancias son finitas. A 1 se llega por $0, 2, 3, 1$, con costo $4 + 1 - 1 = 4$, más barato que la arista directa de peso 5. Los ciclos $0, 2, 3, 0$ y $1, 3, 1$ pesan 3 y 1.

Consecuencia

Sin ciclos negativos siempre hay un camino más corto simple, y un camino simple en un grafo de n vértices tiene a lo sumo $n - 1$ aristas.

Un ciclo negativo



Pregunta

Desde 0, ¿cuál es el camino más corto de 0 a 1?

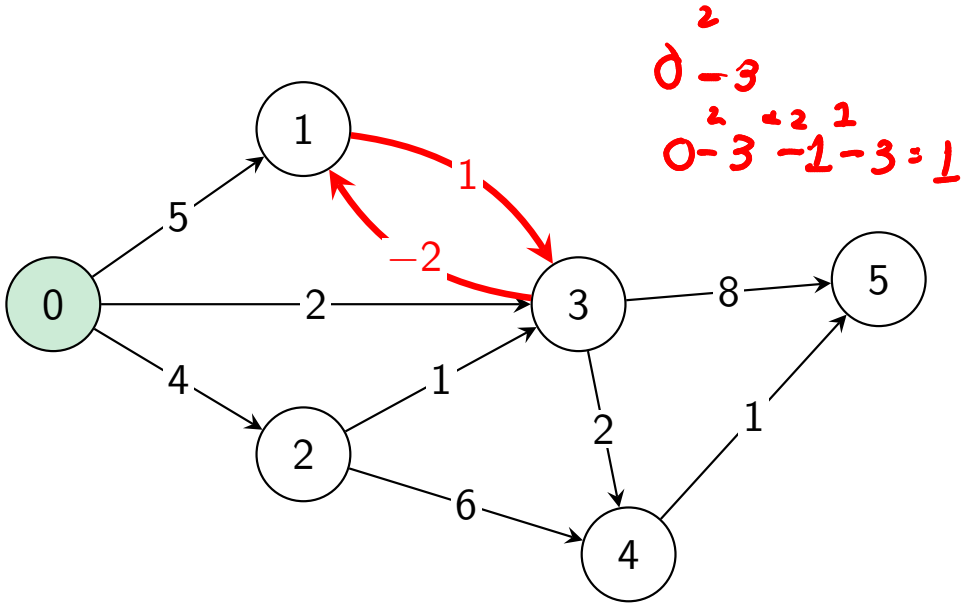
Respuesta

No existe. El ciclo $0, 1, 0$ pesa $2 - 4 = -2$: el camino $0, 1$ cuesta 2, el camino $0, 1, 0, 1$ cuesta 0, el siguiente -2, y cada vuelta resta 2 más. Siempre hay uno más barato.

CLRS, Capítulo 24, pesos negativos

Cuando hay un ciclo negativo que se alcanza desde el origen, el problema no está bien definido: no hay mínimo para los vértices a los que se llega pasando por el ciclo.

Un ciclo negativo dentro de un grafo

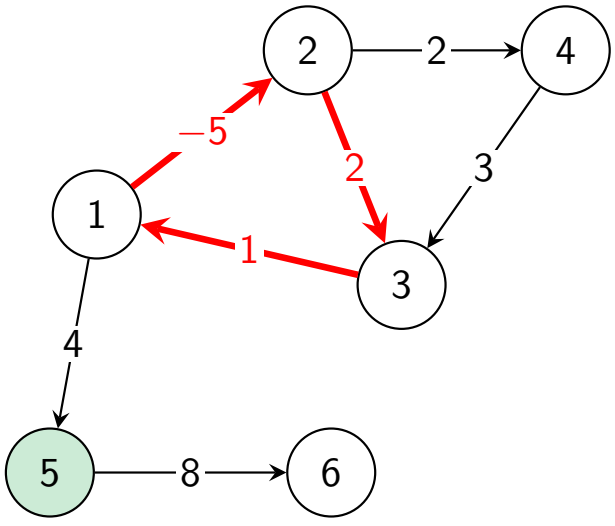


El ciclo 1, 3, 1

Pesa $1 - 2 = -1$ y se alcanza desde 0. A 1, 3, 4 y 5 se llega pasando por él, y ninguno tiene camino más corto.

	0	1	2	3	4	5
`dist`	no está definido					

Un ciclo negativo al que no se llega



APSP *NO

SPSP Sí

Pregunta

El ciclo $1, 2, 3, 1$ pesa $-5 + 2 + 1 = -2$. Con origen en 5, ¿está definido el problema?

Respuesta

Sí. Desde 5 solo se llega a 6: $\texttt{dist}[5] = 0$, $\texttt{dist}[6] = 8$ y los demás quedan en ∞. Un ciclo negativo solo daña el problema si se alcanza desde el origen.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

La idea de Bellman-Ford-Moore



Se cuenta cuántas aristas usa el camino

En lugar de buscar de una vez el camino más corto, se calculan los caminos más cortos que usan:

- a lo sumo 0 aristas: solo el origen, con costo 0;
- a lo sumo 1 arista;
- a lo sumo 2 aristas, y así hasta a lo sumo $n - 1$ aristas.

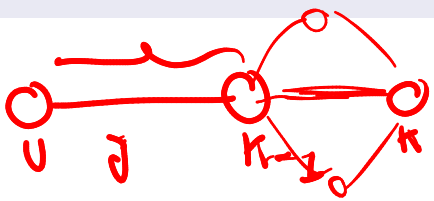
La idea de Bellman-Ford-Moore

Por qué alcanza con $n - 1$

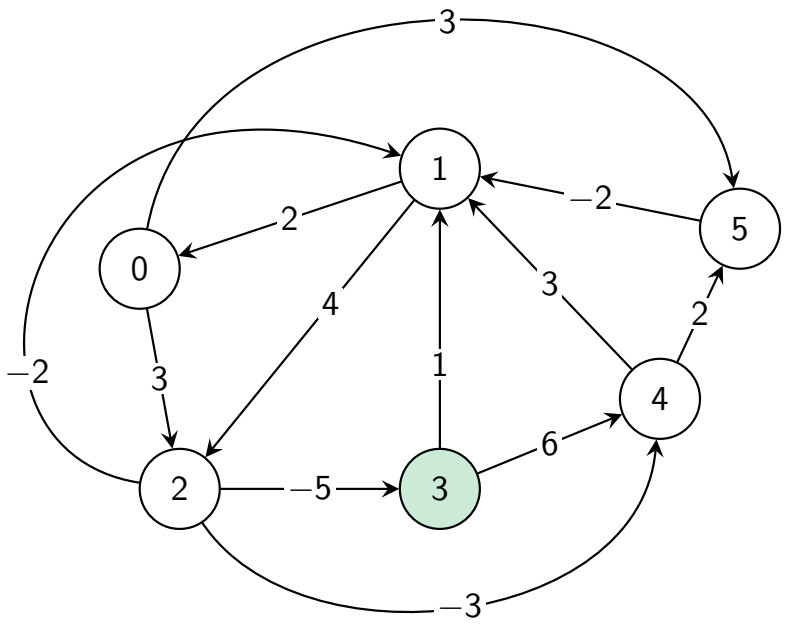
Sin ciclos negativos alcanzables, el camino más corto es simple y tiene a lo sumo $n - 1$ aristas. Los caminos de a lo sumo $n - 1$ aristas ya contienen la respuesta.

Cómo se pasa de $k - 1$ a k

Un camino más corto de a lo sumo k aristas hasta v es, o el que ya se tenía con $k - 1$, o uno de a lo sumo $k - 1$ aristas hasta algún u seguido de la arista (u, v). Se prueban todas las aristas y se queda el más barato.



Ejemplo: el grafo y 0 aristas



Origen 3

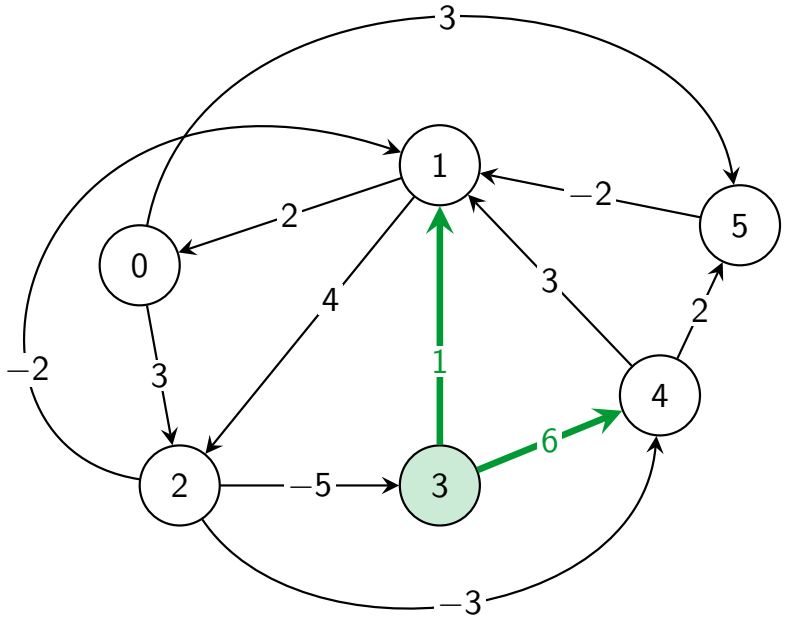
Seis vértices, así que los caminos más cortos tienen a lo sumo 5 aristas.

Con 0 aristas

Solo se llega a 3, con costo 0.

k	0	1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	0	∞	∞
`pred`	-1	-1	-1	-1	-1	-1

A lo sumo 1 arista

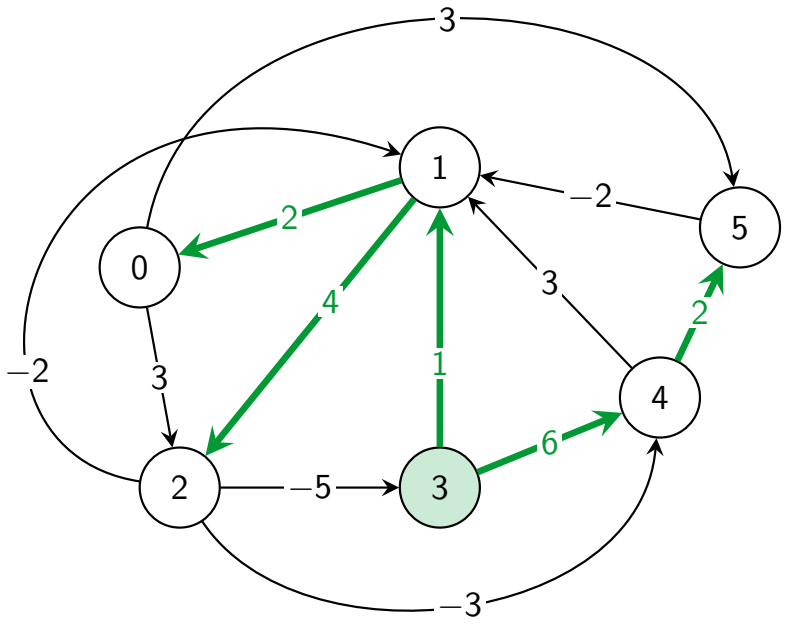


Lo nuevo

Las aristas que salen de 3: a 1 con costo 1 y a 4 con costo 6.

k	0	1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	0	∞	∞
1	∞	1	∞	0	6	∞
`pred`	-1	3	-1	-1	3	-1

A lo sumo 2 aristas

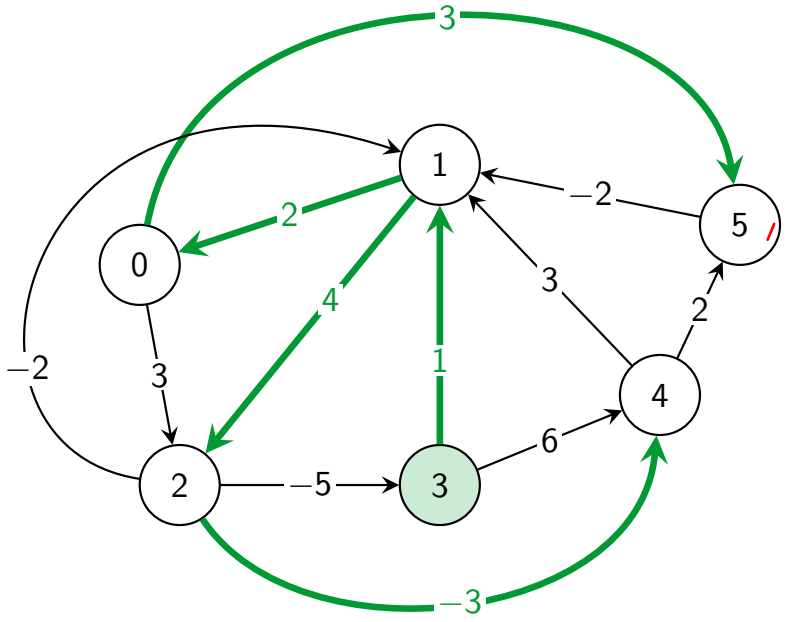


Lo nuevo

Se extienden los caminos que llegan a 1 y a 4: $1 + 2 = 3$ a 0, $1 + 4 = 5$ a 2 y $6 + 2 = 8$ a 5. La arista $4 \to 1$ daría $6 + 3 = 9$, peor que 1.

k	0	1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	0	∞	∞
1	∞	1	∞	0	6	∞
2	3	1	5	0	6	8
`pred`	1	3	1	-1	3	4

A lo sumo 3 aristas

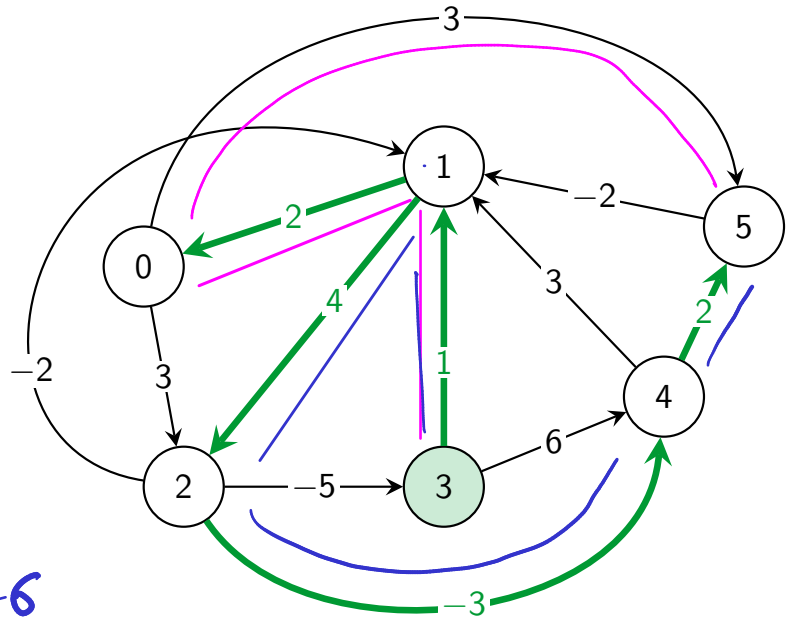


Lo nuevo

$2 \to 4$ da $5 - 3 = 2$, mejor que 6, y $0 \to 5$ da $3 + 3 = 6$, mejor que 8. La arista $2 \to 3$ da $5 - 5 = 0$: no mejora a 3.

k	0	1	2	3	4	5
1	∞	1	∞	0	6	∞
2	3	1	5	0	6	8
3	3	1	5	0	2	6
pred	1	3	1	−1	2	0

A lo sumo 4 y 5 aristas



n = 6

n − 1 = 5

Lo nuevo

Con 4 aristas, $4 \to 5$ da $2 + 2 = 4$, mejor que 6. Con 5 aristas no mejora nada.

3 - 5

k	0	1	2	3	4	5
3	3	1	5	0	2	6
4	3	1	5	0	2	4
5	3	1	5	0	2	4
pred	1	3	1	−1	2	4

A lo sumo 4 y 5 aristas

La respuesta

La fila de $5 = n - 1$ aristas tiene los costos de los caminos más cortos. Hasta 5 se sube por `pred`: 4, 2, 1, 3. El camino es $3, 1, 2, 4, 5$, de costo $1 + 4 - 3 + 2 = 4$, y usa cuatro aristas.

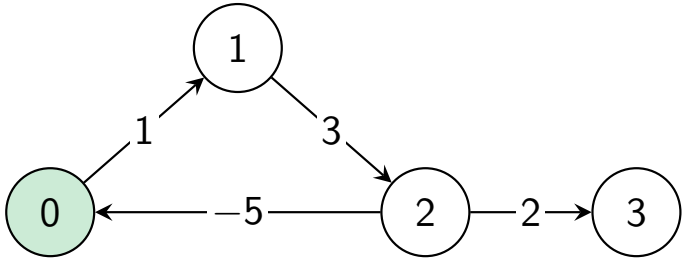
Pregunta

¿Qué pasaría si se calculara la fila de $6 = n$ aristas?

Con n aristas: el ciclo negativo

Respuesta

En el ejemplo no cambia nada. Un camino con n aristas pasa por $n+1$ vértices y repite alguno: tiene un ciclo. Si con n aristas aparece un camino mejor, ese ciclo baja el costo, y es negativo.



$0 - 1 = 1$

$0 - 1 - 2 = 0 - 1 = 0$

1 3 −5 1

k	0	1	2	3
→ 0	0	∞	∞	∞
→ 1	0	1	∞	∞
→ 2	0	1	4	∞
→ 3	−1	1	4	6
4	−1	0	4	6

Con n aristas: el ciclo negativo

Lo que delata la fila $4 = n$

Con $n - 1 = 3$ aristas, $\texttt{dist}[1] = 1$. Con 4 aristas baja a 0, por el camino $0, 1, 2, 0, 1$: pasa dos veces por 1 y en medio está el ciclo $1, 2, 0, 1$, de peso $3 - 5 + 1 = -1$.

En resumen

- Sin ciclos negativos alcanzables, la fila $n - 1$ es la respuesta y la fila n es igual.
- Si la fila n mejora algún costo, hay un ciclo negativo alcanzable y el problema no está definido.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

El teorema

Teorema (CLRS, Lema 24.1)

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ y sea $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ un camino más corto de v_0 a v_k. Entonces, para todo $0 \leq i \leq j \leq k$, el subcamino $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ es un camino más corto de v_i a v_j.

En el ejemplo

El camino más corto a 5 es $3, 1, 2, 4, 5$. Su tramo $3, 1, 2$ cuesta $5 = \texttt{dist}[2]$ y su tramo $3, 1, 2, 4$ cuesta $2 = \texttt{dist}[4]$: los dos son caminos más cortos.

U — E — 6 — M — J

E — 6 — M

El teorema

El teorema en las tablas

El paso de $k-1$ a k aristas toma un camino más corto que ya se tenía y le agrega una arista. Las tablas lo muestran: cada `pred` apunta a un vértice cuyo camino ya estaba en la fila anterior.

Ejercicio sugerido

Demuestre el teorema en cuatro partes: teorema, estrategia, desarrollo y conclusión. Los ejercicios sugeridos del segundo corte pueden ser bonos en el parcial. Si intenta la demostración, puede enviar lo que haga para recibir correcciones.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

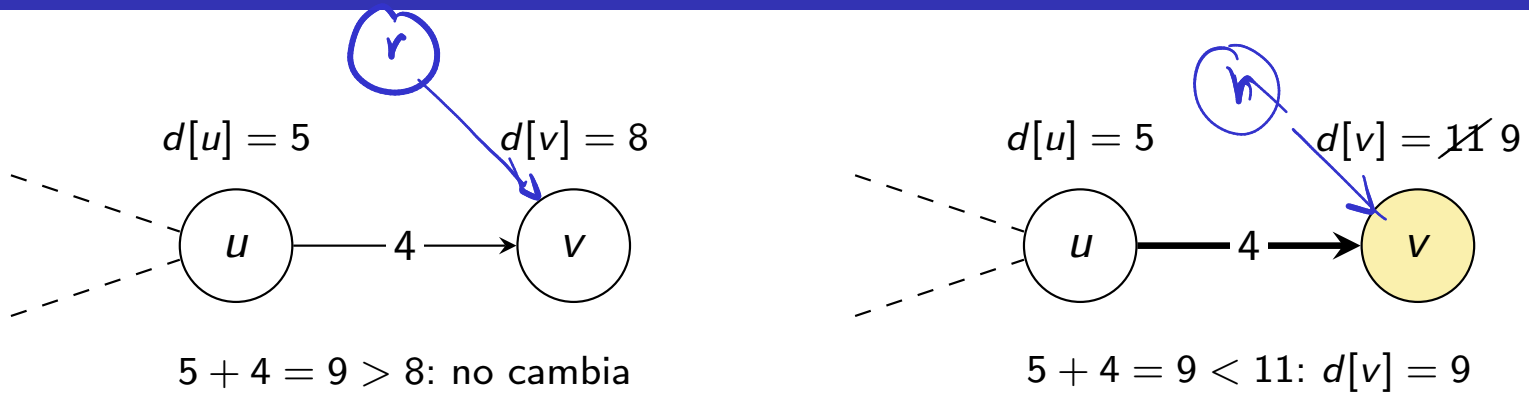
7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Relajar una arista



CLRS, Capítulo 24, relajación

Relajar la arista (u, v) es preguntar si llegar a v pasando por u es más barato que lo que se tiene: si $d[v] > d[u] + w(u, v)$, se cambia $d[v]$ por $d[u] + w(u, v)$ y $\texttt{pred}[v]$ por u.

En las tablas

En el paso de 2 a 3 aristas, relajar $2 \to 4$ con $d[2] = 5$ bajó $d[4]$ de 6 a $5 - 3 = 2$. Es la corrección que la amplitud no hacía.

La idea del algoritmo

Bellman-Ford-Moore, CLRS, Sección 24.1

1. Al comienzo $d[s] = 0$ y $d[v] = \infty$ para los demás; `pred` queda en -1.
2. Se hacen $n - 1$ rondas. En cada ronda se relajan todas las aristas del grafo.
3. Se hace una ronda más, la n, solo para revisar: si al relajar alguna arista d cambia, el grafo tiene un ciclo negativo alcanzable desde s.

La relación con las tablas

Después de la ronda k, $d[v]$ es a lo sumo el costo del camino más corto de a lo sumo k aristas hasta v. Puede ser menor, porque dentro de una misma ronda una arista ya usa los valores que otra acaba de mejorar.

La idea del algoritmo

Lo que cuesta

Cada ronda revisa las m aristas y hay n rondas: $O(n \cdot m)$, la cifra de la tabla de algoritmos.

Denso $O(n \times n^2) = O(n^3)$
Ralo $O(n \times n) = O(n^2)$

Errores comunes

- Hacer $n - 2$ rondas: un camino más corto de $n - 1$ aristas puede quedar sin terminar, y la revisión lo toma por un ciclo negativo.
- Leer `dist` cuando la ronda n cambió algo: esos números no son costos de caminos más cortos.
- Usar la amplitud con pesos distintos: minimiza el número de aristas, no el costo.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Ejercicios

1. La amplitud a mano

Sea A el grafo no dirigido con $V = \{0, \ldots, 6\}$ y aristas 0–3, 0–4, 3–1, 4–1, 4–5, 1–6, 5–6, 5–2, con las listas en orden creciente. Ejecute la amplitud desde 0: escriba el orden en que salen de la cola, `dist` y `pred` de cada vértice, y reconstruya el camino a 6 y el camino a 2.

2. Pesos enteros con la amplitud

En un grafo dirigido con pesos enteros positivos, cada arista (u, v) de peso w se cambia por un camino de w aristas sin peso a través de $w - 1$ vértices nuevos. Muestre que la amplitud sobre el grafo nuevo da los costos del grafo original y diga cuánto cuesta en función de n, m y el peso máximo W. ¿Cuándo no conviene?

Ejercicios

3. Un ciclo de peso cero

En el grafo del ejemplo de los caminos de a lo sumo k aristas, con origen 3, encuentre un ciclo de peso 0 que pase por 3. Escriba un camino de 3 a 2 que use ese ciclo y otro que no lo use, con el mismo costo. ¿Por qué basta buscar entre los caminos simples?

4. A lo sumo k aristas a mano

Sea B el grafo dirigido con $V = \{0, \ldots, 4\}$, origen 0 y aristas $(0, 4)$ de peso 6, $(0, 3)$ de peso 4, $(0, 2)$ de peso 7, $(1, 4)$ de peso 5, $(2, 1)$ de peso -1, $(3, 2)$ de peso 2 y $(4, 3)$ de peso -3. Llene la tabla de los costos de los caminos más cortos de a lo sumo k aristas, para $k = 0, \ldots, 5$, con el arreglo `pred` de cada fila, y dibuje el árbol de cada fila.

Ejercicios

5. Detectar el ciclo negativo

Sea C el grafo dirigido con $V = \{0, \ldots, 5\}$, origen 0 y aristas $(0, 1)$ de peso 2, $(1, 2)$ de peso 1, $(2, 3)$ de peso -4, $(3, 1)$ de peso 2, $(3, 4)$ de peso 3 y $(5, 4)$ de peso 1. Llene la tabla de los caminos de a lo sumo k aristas para $k = 0, \ldots, 6$. Diga qué costo mejora en la fila 6, recupere el ciclo negativo subiendo por `pred` y diga qué pasa con el vértice 5.

6. Ejercicio sugerido: el teorema

Demuestre que los caminos más cortos se componen de caminos más cortos (CLRS, Lema 24.1), en cuatro partes: teorema, estrategia, desarrollo y conclusión.

Ejercicios

7. Una ronda contra una fila

En el grafo B, parta de $d = (0, \infty, \infty, \infty, \infty)$ y relaje todas las aristas una sola vez, en el orden en que aparecen en el ejercicio 4, usando cada vez los valores que ya cambiaron. Compare el resultado con la fila de a lo sumo 1 arista. ¿Con qué fila coincide, y por qué una ronda puede ir más adelante que la fila del mismo número?

Pistas

Ejercicios 1 a 4

1. Salen $0, 3, 4, 1, 5, 6, 2$. El vértice 2 queda a tres aristas de 0.
2. El grafo nuevo tiene hasta $n + m(W - 1)$ vértices. Compare ese tamaño con $n \cdot m$.
3. Mire las aristas $1 \to 2$, $2 \to 3$ y $3 \to 1$.
4. La fila de 5 aristas es $(0, 4, 5, 3, 6)$. El camino más corto a 1 es $0, 4, 3, 2, 1$ y necesita las cuatro aristas.

Pistas

Ejercicios 5 a 7

5. En la fila 6, `dist`[3] baja de -1 a -2. Al vértice 5 no se llega desde 0.
6. Por contradicción: si un tramo tuviera un camino más barato, se cambia ese tramo y el camino completo baja.
7. Una ronda deja $(0, 6, 6, 3, 6)$.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Lo que sigue

Las implementaciones de Bellman-Ford-Moore

De la que más gasta a la que menos:

- una matriz con una fila por cada k;
- un solo arreglo de distancias;
- la que se detiene cuando una ronda no cambia nada;
- la que usa una cola, que es la variante de Moore.

Para investigar en CLRS, Sección 24.1: ¿cuánto espacio pide la matriz y cómo se baja a un solo arreglo?

Grafos de estado

Problemas en los que el grafo que se recorre no es el del enunciado, sino uno cuyos vértices son estados.

Contenido

1 Antes de empezar

2 Las dos versiones del problema

3 Repaso: la búsqueda en amplitud

4 Ciclos en un camino más corto

5 Caminos de a lo sumo k aristas

6 Los caminos más cortos se componen de caminos más cortos

7 Relajación y la idea del algoritmo

8 Ejercicios

9 Lo que sigue

10 Referencias

Referencias



Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. MIT Press, 2009. Sección 22.2 y Teorema 22.5 (amplitud y caminos más cortos sin pesos); Capítulo 24, introducción: variantes del problema, Lema 24.1, pesos negativos, ciclos y relajación; Sección 24.1 (Bellman-Ford).



Erickson, J. *Algorithms*. 2019. Capítulo 8, caminos más cortos: relajación y Bellman-Ford.